M^{30}

Volume 1

Por

Emanuelly de Paula

blogs.unicamp.br/zero

blogs.unicamp.br/m3

Introdução

M^{30} é um projeto de Divulgação Científica de Matemática que incorpora na forma de Ebooks, os textos produzidos semestralmente pelos Blogs de Divulgação Científica de Matemática, Zero e M^3 (conhecido também como Matemática Multimídia), ambos vinculados ao projeto Blogs de Ciências da Unicamp (blogs.unicamp.br).

O Blog Zero teve sua origem em 01 de junho de 2019, focado na intersecção da ludicidade com o formalismo matemático. Nessa dimensão ampla são perpassados tópicos muito diversos, desde discussões sobre gênero, política, animes, ensino, jogos, contos (até alquimia), mas sempre alicerçados em conhecimentos científicos e vistos sob a lente de conceitos relacionados à Matemática.

O Blog M^3 surgiu em 18 de junho de 2020 como uma forma de revisitar as experiências envolvidas na coleção Matemática Multimídia (m3.ime.unicamp.br) que completava 10 anos e passava por uma atualização de seus conteúdos. Neste espaço colaborativo, professores e pesquisadores com qualquer grau de experiência no uso da coleção Matemática Multimídia, podem compartilhar seus relatos e trazer ideias diferentes para combinar, associar ou reutilizar os recursos disponíveis.

Índice

1. Séries Retráteis

blogs.unicamp.br/zero/136 (01/06/2019)

Em matemática, entendemos uma série como a soma (que às vezes pode ser infinita) de termos de uma sequência.

Podemos dizer que uma série é um conjunto ordenado de elementos desta sequência combinados pelo operador de adição.

O termo “série infinita” é usado para enfatizar o fato de que a série contém um número infinito de termos.

O símbolo Σ (somatório) é usado para designar uma soma de N termos de uma sequência.

Após o símbolo Σ aparece o índice inferior do primeiro termo a ser somado e em seguida, o índice superior do último termo a ser somado.

Por exemplo, seja a sequência chamada ALFACE com os elementos 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24…

O primeiro termo desta sequência é 2, o segundo termo é 4, o décimo termo é 20.

Então ao escrevermos $\Sigma_{i=2}^{i=10}$ ALFACE, significa, somar do segundo termo da sequência até o décimo termo desta sequência:

4+ 6+ 10+ 12+ 14+ 16+ 18+ 20

E aí vem uma piada de matemáticos…

Uma vez um matemático foi na fábrica de televisões e ficou somando os números de registro para cada aparelho que passava pela sua frente.

Depois de uma hora disse que estava pronto e que já podia vender sua criação.

Perguntaram o que ele criou?

E ele respondeu, que havia acabado de produzir sua "série de TV".

… (sons de grilo)

Mas série é uma das coisas legais e divertidas na Matemática (diferente de minhas piadas).

A série suporta muitas ferramentas para trabalharmos com elas.

Uma delas é o super poder de "telescopar" séries!

Suponha que eu tenha uma série $\Sigma_{i=1}$ BETERRABA, (quando não definimos um valor máximo na série, isto significa que consideramos qualquer número seu máximo).

Pra lembrar, uma série escrita com esta regra, deve ser assim:

$b_1+ b_2+ b_3+ b_4+ b_5+ \dots+ b_N$, onde N é qualquer número

Para mostrar como funciona “telescopar uma série”, vamos dizer que b_i é $a_{i+1} - a_i$ (lembrando que a sequência ALFACE são os números pares crescentes começando de 2).

Assim, podemos reescrever a série $\Sigma_{i=1}$ BETERRABA como:

$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) + (a_6 - a_5) + \ldots$
$+(a_N - a_{N-1}) + (a_{N+1} - a_N)$

Mas essa soma, pela propriedade comutativa da adição, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$-a_1 + a_2 - a_2 + a_3 - a_3 + a_4 - a_4 + a_5 - a_5 + a_6 - \ldots$
$- a_{N-2} + a_{N-1} - a_{N-1} + a_N - a_N + a_{N+1}$

Para facilitar a visualização, colocarei os grupinhos que se cancelarão em parênteses.

$-a_1 + (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) + \ldots$
$+(a_{N-2} - a_{N-2}) + (a_{N-1} - a_{N-1}) + (a_N - a_N) + a_{N+1[}$

Como podemos ver, todos os termos, exceto o primeiro e o último, serão cancelados.

Ou seja, quando telescopamos a série $\Sigma_{i=1}$ BETERRABA que definimos, temos:

$-a_1 + a_{N+1}$

Por exemplo, se o nosso N final for 100, temos que a soma destas diferenças é:

$-a_1 + a_{101} = -2 + 202 = 200$

Mas você pode estar desconfiando desse super poder de “telescopar” séries, afinal neste exemplo, todos os b_i (para i um número qualquer) será igual a 2 (pois é a diferença entre dois termos da sequência dos pares).

Vamos pegar uma sequência mais “caótica”, que tal os números primos (ou seja, os números Naturais maiores do que 1 que são divisíveis apenas por ele mesmo e por 1)?

Chamaremos esta sequência de P com os elementos $p_1= 2$; $p_2= 3$; $p_3= 5$; $p_4= 7$; $p_5= 11$; $p_6= 13$; $p_7= 17$; $p_8= 19$; $p_9= 23$; $p_{10}= 29$; … Dessa forma:

$b_N = p_{N+1} – p_N$

Então, ao tomarmos a série $\Sigma_{i=1}^{i=9}$ BETERRABA, por exemplo, temos:

$p_2 – p_1+ p_3 – p_2+ p_4 – p_3+ p_5 – p_4$
$+ p_6 – p_5+ p_7 – p_6+ p_8 – p_7+ p_9 – p_8+ p_{10} – p_9$

Utilizando a propriedade comutativa da adição, rearranjamos nossa série da seguinte maneira:

$-p_1+ (p_2 – p_2)+ (p_3 – p_3)+ (p_4 – p_4)+ \dots$
$+ (p_7 – p_7)+ (p_8 – p_8)+ (p_9 –p_9)+ p_{10}$

Assim, dessa série com valores de b_i menos comportados, temos o seguinte resultado:

$-p_1 + p_{10} = -2 + 29 = 27$

De forma análoga, se nossa série fosse $\Sigma_{i=2}^{i=8}$ BETERRABA, teríamos por “telescopia”, a solução:

$-p_2 + p_9 = -3 + 27 = 24$

A ideia aqui é que existem séries que se assemelham a um telescópio retrátil, que após fecharmos o instrumento, temos apenas a parte inicial e a final.

Similar a guardar um telescópio retrátil, as demais partes se retraem para seu interior.

Ok… isso é legal, mas para que serve?

Quando a série é finita, isto pode ser substituído pela soma exaustiva de todos os seus termos… chato, mas funciona.

Mas quando a série é infinita precisamos desta técnica para resolver de modo analítico (não podemos simplesmente somar infinitamente).

Um exemplo bonitinho de série infinita é.

$\Sigma_{i=1}^{i=\infty}$ COUVE, com seus elementos expressos por:

$C_n = 1/n(n+1)$

Os primeiros termos desta sequência são:

1/2; 1/6; 1/12; 1/20; 1/30…

A soma destes 5 termos acima é 0,83…

A soma dos 10 primeiros de Ci é 0,9090…

A soma dos 100 primeiros Ci é 0,99009900…

Será que ela chegará no 1?

Um bom palpite diria que sim, mas uma “telescopada” nesta série PROVA que SIM.

A ideia para telescopar uma série enxergá-la como uma subtração dentre os próprios termos de uma sequência.

Por exemplo:

$C_n = 1/n(n+1) = (1/n) – (1/(n+1))$

Então, a série $\Sigma_{i=1}^{i=\infty}$ COUVE, fica da seguinte forma:

$1/1 – 1/2 + 1/2 – 1/3 +1/3 – 1/4 + 1/4 – 1/5 + \ldots$
$– 1/N + 1/N – 1/(N+1)$

Pela “telescopia” desta série, ela se reduz a:

$1/1 – 1/(N+1)$

E quando N for ∞, $1/(\infty+1)$ será muito próximo de 0.

Então esta série quando N vai ao infinito, tem como resultado:

$1/1 – 0 = 1$

Fica como reflexão para o fim deste texto a próxima figura, com referência ao artista René Magritte que em 1929 fez uma obra sobre a dualidade objeto e representação.

Ilustrando um cachimbo e escrevendo próximo a imagem “Ceci n’est pas une pipe”, que pode ser traduzida como “Isto não é um cachimbo”.

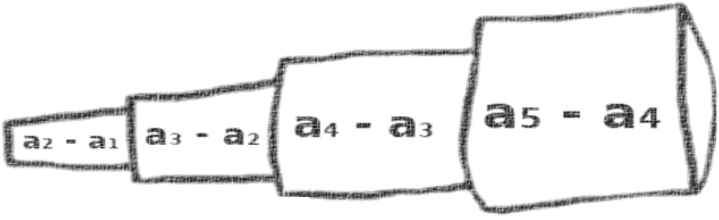
Isto gerou bastante repercussão na época, pois no quadro se via nítido e claro um cachimbo, então como aquilo poderia não ser um cachimbo?

A resposta do autor foi simples e suficiente para justificar sua afirmação a todo seu público.

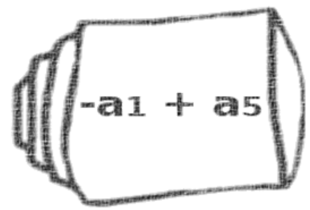
Se isto é um cachimbo, então que alguém tente fumá-lo.

A retórica de que o quadro é em si uma representação de um cachimbo foi a mensagem desejada pela obra.

Outros trabalhos e referências a esta obra aparecem em várias áreas, entre elas a deste mesmo trabalho, no qual apresento uma representação de um telescópio como a série telescópica.



Que apesar dela “aparentemente” retrair-se, isto é apenas uma representação que se associa a forma de retração.



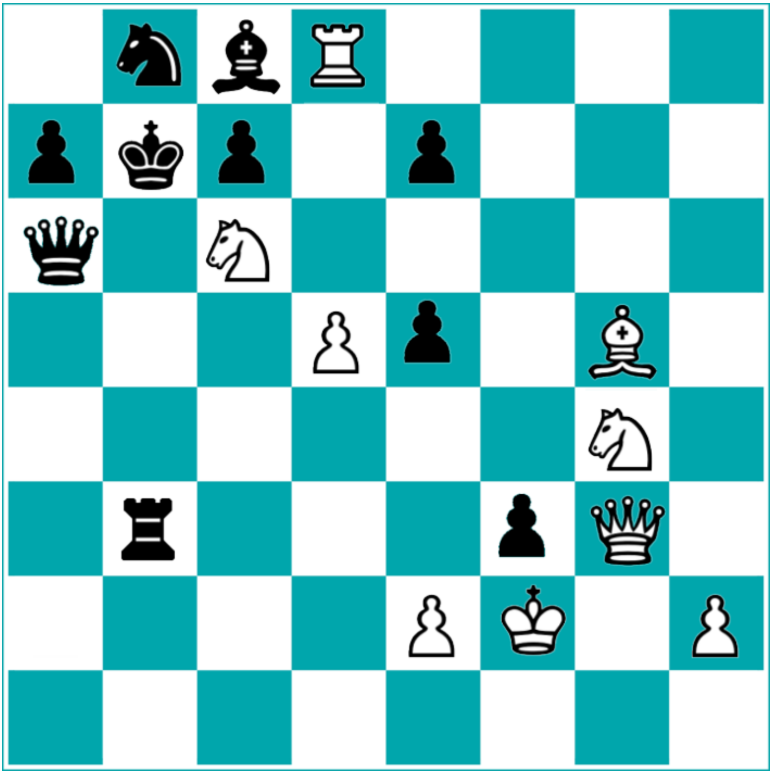
Ceci n'est pas une télescope.

De fato, a série não se retrai fisicamente como um telescópio ou outro objeto, ela é em si um objeto abstrato e sua retração também se faz da mesma maneira, ultrapassando qualquer analogia ao universo concreto.

2. Xadrez Esquecido

blogs.unicamp.br/zero/209 (07/06/2019)

Ao observarmos um jogo de xadrez em progresso, podemos imaginar o que estava acontecendo até aquele momento.



Você consegue imaginar como este jogo chegou nesta situação?

Como os jogadores pensaram, qual o andamento do jogo, a quanto tempo ele ocorre e o que já aconteceu…

Porém, isto se apoia em uma premissa totalmente falsa para este jogo, a existência de uma longa “memória”.

Na verdade, xadrez é um jogo com pouca memória…

Em teoria da probabilidade, a “Falta de memória” é uma conhecida propriedade de algumas distribuições.

Ela se refere a distribuição de probabilidade não depender do “tempo de transferência” em um evento específico.

De uma maneira simples, podemos entender a falta de memória na probabilidade como a “indiferença” entre os resultados anteriores com os novos eventos.

Por exemplo, se temos 1% de chance de sofrer um acidente de carro toda vez que saímos de casa. Então, se sairmos uma vez por dia durante um ano, $(1-0.01)^{365}$ será a chance de não ter um acidente de carro este ano, o que dá algo na faixa de 25,5%.

Mas essa distribuição não tem memória, ou seja, se sofro ou não um acidente naquele dia, isso não aumenta ou reduz minha chance de sofrer um acidente no dia seguinte.

Mas o foco aqui é falar sobre algo menos trágico do que acidentes.

Um exemplo simples que não tem memória é um jogo de lançamento de moedas.

A chance de lançar uma moeda honesta 10 vezes e ela cair coroa todas as vezes é de $(0,5)^{10}$, algo próximo de 0,1%.

Assim, sabendo que lancei a moeda 9 vezes e obtive cara, qual a chance da minha moeda cair cara no décimo lançamento?

Neste caso, o resultado dos outros 9 lançamentos é indiferente ao novo resultado, dessa forma a chance de obter cara no décimo lançamento independe do resultado dos outros 9, ou seja, temos 50% de chance disso acontecer.

Outro exemplo para esquentar as coisas: a chance de alguém jogar uma vez e ganhar na Mega-Sena é de 1 para 50.063.860.

Assim a chance de alguém jogar duas vezes e ganhar na Mega-Sena duas vezes é de 1 para 2.506.390.078.099.600.

Mas a chance de alguém que jogou uma vez e ganhou, jogar uma segunda vez e ganhar também, é de 1 para 50.063.860.

Ou seja, o resultado seguinte independe da sorte no primeiro resultado já confirmado.

Estes são exemplos de probabilidades sem memória.

Apenas para exemplificar uma situação com memória, suponha que exista uma caixa com 1.000 parafusos.

A chance de um parafuso ter sido produzido com defeito é de 1%.

Ou seja, estimamos que destes 1.000, existam cerca de 10 com defeito.

Analisemos então alguns casos simples para mostrar a memória deste evento:

A) Se verificamos 900 destes 1000 parafusos e nenhum estava com defeito, a chance de pegarmos um dos 100 restantes para verificar e ser defeituoso, é algo próximo a 10%;

B) Se verificamos 950 destes 1000 parafusos, e nenhum deles estava com defeito, a chance de pegarmos um dos 50 restantes para verificar e ser defeituoso, é algo próximo a 20%;

C) Se verificamos 980 destes 1000 parafusos, e nenhum deles estava com defeito, a chance de pegarmos um dos 20 restantes para verificar e ser defeituoso, é algo próximo a 50%;

D) Se verificamos 990 destes 1000 parafusos, e nenhum deles estava com defeito, a chance de pegarmos um dos 10 restantes para verificar e ser defeituoso, é algo próximo a 100%.

Com uma ideia do que seja memória em probabilidade, já podemos falar sobre o jogo de xadrez.

Este é um jogo com pouca memória, mas o que quero dizer com isso?

A) Existem peças completamente esquecidas neste jogo: Rainha; Cavalos; Bispos;

B) Existem peças com pouca memória: Torres; Reis (por causa do movimento de Roque);

C) Existem peças com uma memória “razoável”: Peões (eles não são perfeitos na memória porque em muitos casos, não é possível dizer exatamente, analisando o tabuleiro, que ações foram tomadas para chegar a tal contexto).

A este respeito, quando olhamos para um tabuleiro, os jogadores podem ter se enfrentado de maneiras diferentes, repetido padrões de jogo, retornado todas as suas peças para as posições originais e reiniciado a partir de lá o seu combate.

Não há regras que impeçam os jogadores de se divertirem de maneira pacífica dentro do jogo.

Assim, analisaremos agora algumas ações que possuem “um pouco de memória”.

A) Peças eliminadas, porque embora os peões possam substituí-las, elas ainda comprometem a existência de um Peão e sua capacidade de atingir a oitava casa, isto é, implica a limpeza do caminho bloqueado por outro Peão;

B) Roque, porque mover o Rei ou a Torre referindo-se a essa ação o compromete, então é como se houvesse um status “Roque livre” ou “Roque usado”;

C) O famoso “movimento de duas casas” pelo Peão, que só pode ser usado quando ocupa a posição inicial;

D) “El passante”, um movimento especial do Peão que só pode ser aplicado no próximo movimento ao qual um Peão inimigo passa através dele usando o famoso “movimento de duas casas”;

E) A incapacidade dos Peões de se mover para trás, de modo que cada avanço de um Peão é permanente em parte da memória do jogo;

F) Peões, seja por serem eliminados ou utilizados para substituir outras peças.

Então o jogo de xadrez tem alguma memória, mas não o suficiente para observar somente o estado atual do jogo e recriar com segurança o que aconteceu entre os jogadores.

Isso significa que podemos pensar, no máximo, a partir de uma determinada instância, e não querer confiar no que aconteceu antes do jogo chegar naquele estado.

Você pode imaginar, dois grandes mestres de xadrez (X, Y) estão jogando um com o outro, o jogo deles começou uma hora atrás.

E agora começam a jogar dois outros grandes mestres do xadrez (W, Z).

Depois de um tempo jogando, o tabuleiro de ambos os pares está por coincidência com exatamente a mesma formação, o Roque e o direito a usar o “El passante” estão com o mesmo status.

As duplas são interrompidas e pedem que os jogadores X e W troquem de lugares, e assim continuem o jogo da outra mesa.

Mas como ambos os tabuleiros são idênticos e o jogo não tem tanta memória assim, isso de modo algum deveria afetar suas estratégias, ainda que os status delas sejam diferentes por uma hora de jogo a mais ou a menos.

Pois não importa como o seu adversário fez para conseguir as peças nessa configuração, já que em ambos os casos os jogos seguiram estratégias diferentes.

E em cada mesa, temos um jogador que mentaliza o jogo acontecendo em um tempo de N minutos, e o outro que mentaliza o jogo acontecendo em um tempo de uma hora e N minutos.

Um exemplo mais simples, seria se os jogadores X e Y movimentarem apenas os cavalos por 16 jogadas, até que retornem para as posições iniciais de jogo.

Nessa situação, os jogadores W e Z estavam para começar o jogo, quando pedem que o jogador W troque de lugar com o jogador X.

O jogo para o jogador X já está na 17a jogada enquanto para o jogador W está na 1a jogada.

O mesmo acontece com os jogadores Y e Z.

3. O Bom, o Mau e o Feio

blogs.unicamp.br/zero/236 (15/06/2019)

Imagine um trielo no velho-oeste (um duelo entre três pessoas).

Sem perda de generalidade (como se houvessem generalidades em trielos no velho-oeste), chamaremos as pessoas envolvidas de Bom, Mau e Feio.

Neste trielo, quem for atingido por um tiro é considerado eliminado da disputa.

A ordem de disparo é bem definida e respeitada entre os envolvidos que ainda estão na disputa (ou seja, que não foram atingidos).

Assim, cada um tem direito a dar um disparo na sua vez, começando pelo Feio, depois o Mau, depois o Bom, então o ciclo reinicia com aqueles que continuam na disputa.

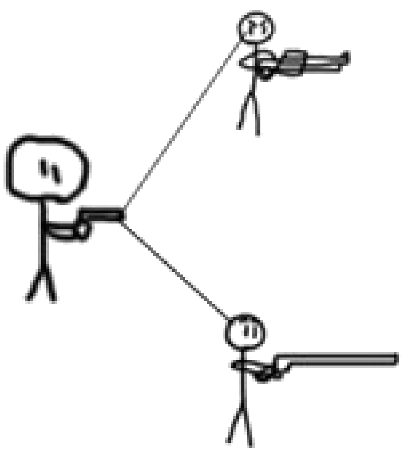
Mas cada um deles tem uma precisão de acerto diferente:

Feio: acerta o alvo 1/3 das vezes;

Mau: acerta o alvo 1/2 das vezes;

Bom: acerta seu alvo todas as vezes.

Resta a dúvida, qual a melhor estratégia para o Feio?



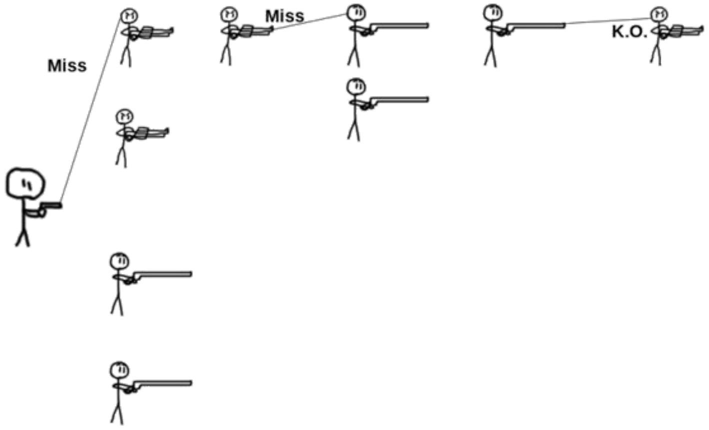
Temos que considerar que existe uma ordem clara de ameaças entre os envolvidos:

Bom) Caso o Bom precise atirar, e o Feio e o Mau estejam na disputa, o Bom vai optar por atirar no Mau, pois a chance do Mau acertá-lo é maior do que a chance do Feio acertá-lo (o Mau é uma ameaça maior);

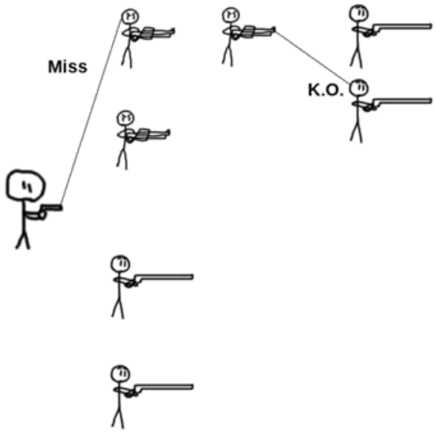
Mau) Caso o Mau precise atirar, e o Feio e o Bom estejam na disputa, o Mau vai tentar atirar no Bom, pois sabe que o Bom o considera uma ameaça maior e o eliminará na ação seguinte.

Para facilitar esta análise, vamos expandir as possibilidades de destino mediante as escolhas do Feio:

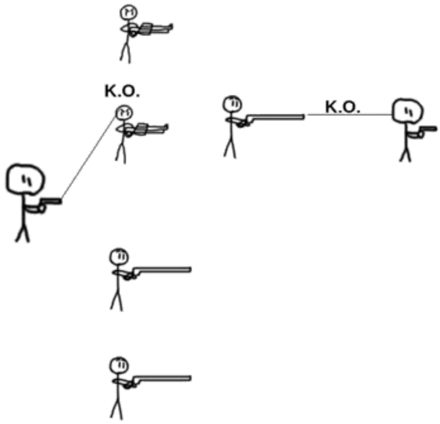
A) O Feio atira no Mau, mas erra (miss), o Mau atira o Bom, mas erra (miss), o Bom atira no Mau, e acerta, eliminando-o. Sobram no trielo o Feio e o Bom.



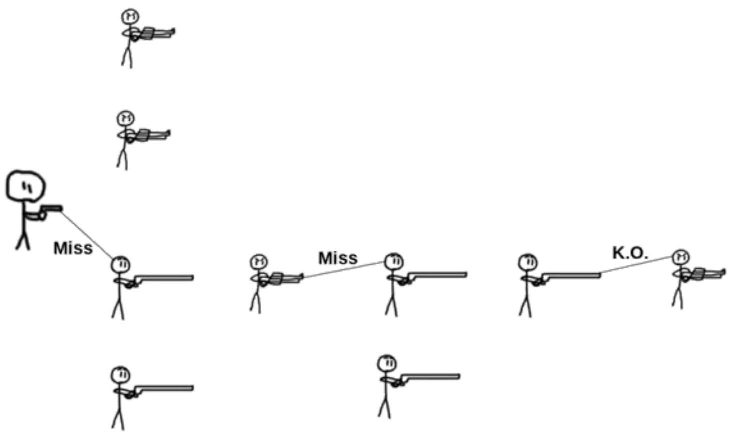
B) O Feio atira no Mau, mas erra (miss), o Mau atira o Bom, e acerta, eliminando-o. Sobram no trielo o Feio e o Mau.



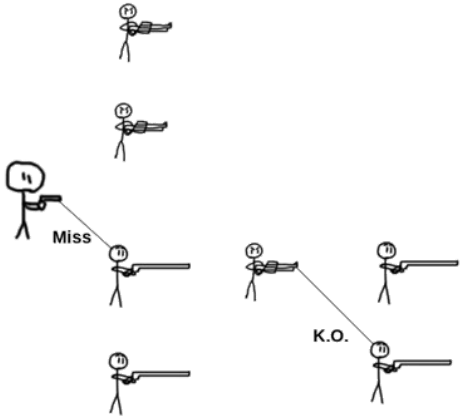
C) O Feio atira no Mau, e acerta, eliminando-o, o Bom atira no Feio, e acerta, eliminando-o. Sobra no trielo apenas o Bom.



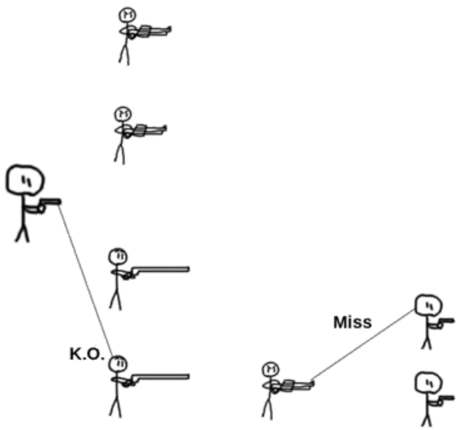
D) O Feio atira no Bom, mas erra, o Mau atira o Bom, mas erra, o Bom atira no Mau, e acerta, eliminando-o. Sobram no trielo o Feio e o Bom.



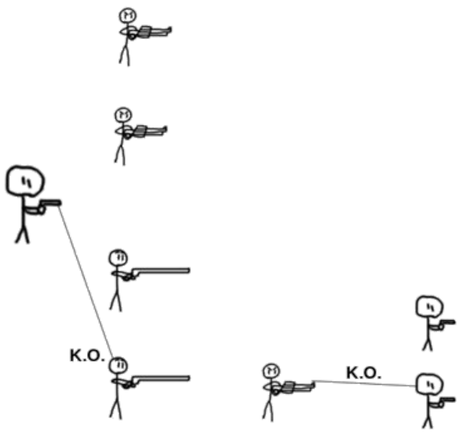
E) O Feio atira no Bom, mas erra, o Mau atira no Bom, e acerta, eliminando-o. Sobram no trielo o Feio e o Mau.



F) O Feio atira no Bom, e acerta, eliminando-o, o Mau atira no Feio, mas erra. Sobram no trielo o Feio e o Mau.



G) O Feio atira no Bom, e acerta, eliminando-o, o Mau atira no Feio, e acerta, eliminando-o. Sobra no trielo apenas o Mau.



Analisando estas possibilidades apresentadas:

1. Se o Feio atirar no Mau, ele tem 66% de chance de ficar na disputa até a próxima rodada;

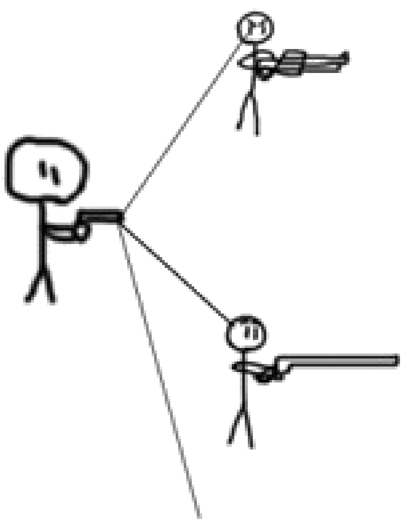
2. Se o Feio atirar no Bom, ele tem 83% de chance de ficar na disputa até a próxima rodada.

Parece que a solução é atirar no Bom… mas será que existe uma opção melhor?

Afinal, em todos os casos expandidos, os piores resultados envolviam o Feio acertar o alvo.

Assim, todo o problema está ligado ao Feio acertar em quem ele atirou.

Dessa forma, e se ele errar de propósito?



Isso garante que o Mau tentará acertar o Bom, e o Bom se sobreviver, acertará o Mau.

Assim, o Feio tem 100% de chance de sobreviver nesta primeira rodada, e apenas o Mau ou o Bom estarão na disputa, pois um tentará eliminar o outro nas suas oportunidades de atirar.

4. Terrivelmente Harmônico

blogs.unicamp.br/zero/268 (22/06/2019)

Na matemática algumas coisas importantes possuem nomes, uma delas é a famosa Série Harmônica, que chamaremos neste texto de H, e o n-ésimo termo desta série de H(n).

Então H(n) é dado por 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + … + 1/n.

Hora de brincar um pouco com isto.

H(1)=1.00

H(2)=1+1/2=1.50

H(3)=1+1/2+1/3=1.83

H(4)=1+1/2+1/3+1/4=2.08

H(5)=1+1/2+1/3+1/4+1/5=2.28

H(6)=1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6=2.45

H(7)=1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7=2.59

H(8)=1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8=2.71

H(9)=1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+1/9=2.82

…

H(100)=1+1/2+1/3+…+1/100=5.18

…

H(1000)=1+1/2+1/3+…+1/1000=7.48

…

H(10000)=1+1/2+1/3+…+1/10000=9.78

Mas uma dúvida começa a crescer junto com esta série… será que em algum momento ela vai parar de crescer?

Dizemos que uma série diverge quando ela não converge (uma clara explicação ao estilo da matemática…).

Sendo um pouco mais específico, a convergência de uma série implica na sua estabilização à medida que o índice dos termos aumenta.

Por exemplo, a série S = 1+1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+… converge para o número 2.

Há dois modos de mostrar isto:

Jeito 1) Multiplique S por 2. Temos então 2S=2+1+1/4+1/8+1/16+1/32+… Mas 2S – S = S. Logo, posso subtrair os termos S da série 2S e obter seu valor final:

1 se anula com 1;

½ se anula com ½;

¼ se anula com ¼;

1/8 se anula com 1/8;

1/16 se anula com 1/16;

1/32 se anula com 1/32;

“três pontinhos” se anula com “três pontinhos”.

O que sobra é o 2.

Jeito 2) Desenhe dois quadrados do mesmo tamanho. Pinte o primeiro (temos 1 quadrado pintado);

Agora divida o 2o quadrado ao meio e pinte uma metade (temos 1+1/2 quadrados pintados);

Agora divida a parte não pintada do 2o quadrado ao meio e pinte-a também (temos 1+1/2+1/4 quadrados pintados);

Agora divida a parte não pintada do 2o quadrado ao meio e pinte-a também (temos 1+1/2+1/4+1/8 quadrados pintados);

Agora divida a parte não pintada do 2o quadrado ao meio e pinte-a também (temos 1+1/2+1/4+1/8+1/16 quadrados pintados);

Perceba que repetindo este processo muitas vezes, a região “não pintada” praticamente desaparece, ou seja, no final de infinitas divisões da parte não pintada teremos 2 quadrados inteiramente pintados.

Ou seja, sempre podemos achar um N tal que este somatório esteja tão perto do número 2 quanto queiramos, isto de forma simples, significa que a série é convergente… e aqui vai uma piada sobre séries convergentes.

Era uma vez um bar no qual se formou uma fila de infinitos matemáticos.

O primeiro matemático pediu ½ garrafa de uísque, o segundo pediu ¼ da garrafa, o terceiro pediu 1/8 da garrafa, o quarto pediu 1/16 da garrafa… e assim sucessivamente.

Cansado de ouvir seus pedidos, o dono do bar colocou na mesa uma garrafa de uísque cheia e foi embora.

Os matemáticos questionaram sobre seus pedidos e o dono do bar respondeu: por favor senhores, conheçam seus limites!

(sim, matemáticos adoram inventar piadas, e geralmente ninguém ri delas)

Voltando ao assunto, uma série é divergente quando ela não se aproxima de nenhum número.

No caso, temos séries que oscilam indefinidamente, como por exemplo 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1… esta série independente de quanto seu índice cresça, nunca estará realmente próxima de 1 e nem de 0.

Neste caso, é uma série divergente.

Outro tipo de série divergente é a série que diverge para o infinito (ou para o infinito negativo).

Podemos pensar que a Série Harmônica não passará por isto, afinal quanto mais o índice dela crescer, seu n-ésimo termo 1/n vai se aproximar cada vez mais de 0.

Então teremos uma soma de números muito próximos de 0, e como aprendemos na escola, 0+0+0+0+0+0+…+0 = 0, mas aqui está um erro, os termos desta série se aproximam de 0, mas não são realmente iguais a 0.

Mas como podemos ter certeza de que uma coisa que cresce tão lentamente (afinal, quanto maior o n se torna, mais próximo de 0 seus termos ficam), pode ir para o infinito?

Por esta razão, trato a Série Harmônica como “A Série Terrivelmente Lenta com uma Convergência Extremamente Ineficiente”.

Pois é uma série que cresce lentamente, mas muito lentamente mesmo, e que sua convergência (ou seja, sua estabilização em um número) é ineficiente (dado que ela diverge, crescendo para o infinito).

Este título é referência ao personagem Ginosaji, do vídeo “O Assassino Terrivelmente Lento com a Arma Extremamente Ineficiente”, dado que ele leva anos para matar sua vítima, atingindo-a com furiosas colheradas usando a parte arredondada de uma colher de sopa, até que ela sucumba aos ferimentos da sua terrível colher.

Série Harmônica

Certo, mas você pode estar pensando, isto vai mesmo crescer para sempre?

E para um n = 10.000.000.000?

Ou talvez isto nunca passe de um número muito grande, como por exemplo, 10.000.000.000.

Então, estas são dúvidas comuns, especialmente para uma série que cresce tão lentamente.

E é por isso que vou mostrar aqui a demonstração de divergência da série Terrivelmente Lenta.

Primeiro vamos expandir um pouco esta série:

H(n)= 1+ 1/2+ 1/3+ 1/4+ 1/5+ 1/6+ 1/7+ 1/8+ 1/9+ 1/10+ 1/11+ 1/12+ 1/13+ 1/14+ 1/15+ 1/16 + 1/17+…

Vejamos que o terceiro termo é maior que 1/4 (óbvio, 1/3 > 1/4).

Também, que o quinto, sexto e sétimo termos são maiores que 1/8.

O nono até o décimo quinto termos, cada um deles é maior que 1/16.

Consequentemente, do décimo sétimo termo até o trigésimo primeiro termo, será cada um maior que 1/32, e assim por diante.

Generalizando, os termos entre $2^{n-1}+1$ e 2^{n-1} serão maiores que $1/2^n$.

Com isto, nós podemos criar uma série que cresce mais lentamente que a série Harmônica, que chamaremos de SH (super harmônica).

Vamos então expandir um pouco está duas séries.

H(n)= 1
+ 1/2
+ 1/3+ 1/4+ 1/5+ 1/6+ 1/7+ 1/8
+ 1/9+ 1/10+ 1/11+ 1/12+ 1/13+ 1/14+ 1/15+ 1/16
+ 1/17+ …

SH(n)= 1
+ 1/2
+ 1/4+ 1/4
+ 1/8+ 1/8+ 1/8+ 1/8
+ 1/16+ 1/16+ 1/16+ 1/16+ 1/16+ 1/16+ 1/16+ 1/16
+ 1/32+ …

Você pode estar pensando, se já é difícil mostrar que a série harmônica cresce até o infinito, quem dirá mostrar que a super harmônica cresce até o infinito?

Mas pelo contrário, mostrar que a super harmônica cresce até o infinito é mais fácil do que parece.

E como a harmônica é maior que a super harmônica, mostrar que a super harmônica vai até o infinito, nos garante que a harmônica também vai.

Observe que para qualquer termo n maior do que 1 da super harmônica, se somarmos o termo $2^{n-1} + 1$ até o termo 2^n, nós teremos exatamente 1/2.

SH(n)= 1
+ ½
+ [(1/4+1/4)=0,5]
+ [(1/8+1/8+1/8+1/8)=0,5]
+ (1/16+1/16+1/16+1/16+1/16+1/16+1/16+1/16)=0,5]
+[(1/32+…+1/32)=0,5]
+ [(1/64+…+1/64)=0,5]
+ 1/128+…

Com isto, nós podemos garantir que para SH(n) com $n>2^m$, SH será maior que 1+(m/2).

Então, para qualquer número k que escolhemos, sendo k suficientemente grande, nós podemos encontrar m tal que 1+(m/2)>k, e com isto temos que SH(n) com $n>2^m$, que implica H(n)>SH(n)>k.

Isto demonstra que SH diverge para o infinito, e por consequência a série Harmônica, que é maior do que a série Super Harmônica, também deve divergir para o infinito.

5. Primo de Sheldon

blogs.unicamp.br/zero/286 (27/06/2019)

Este é um texto para uma data especial do ano, o 3/7 (dependendo do calendário pode ser 7/3).

Dias que remetem às características que fazem o 73 ser considerado pelo personagem Sheldon Cooper, da série The Big Bang Theory, como o melhor dos números.

– *Qual é o melhor número?*

– *Só para constar, só existe uma resposta correta.*

– *O melhor número é o 73.*

– *Vocês devem estar se perguntando a razão.*

– *73 é o 21º número primo, seu reverso, o 37 é o 12º, cujo reverso, o 21, é o produto da multiplicação de… segurem a respiração, 7 e 3.*

– *Então? Então? Estou mentindo?*

As falas selecionadas referem-se ao personagem Sheldon Cooper no início do episódio 73 (10º episódio da 4ª temporada: A Hipótese do Parasita Alienígena).

Vocês podem estar pensando (ou não), se o número 37 também é o melhor número?

Mas a resposta é não, observe porque:

Reverso do 37 é o 73, o 37 é o 12º número primo, mas 12 não é produto da multiplicação de 3 e 7 (nesse momento imagino do leitor uma expressão de surpresa).

Como todos sabem (ou pelo menos eu acho que sabem), matemáticos adoram problemas, muito mais do que soluções.

Soluções não tem graça, soluções resolvem as coisas e acabam com toda a diversão.

Mas problemas, problemas são empolgantes, são difíceis e te fazem acordar a noite para rascunhar uma ideia.

Assim, a comunidade matemática diante a fala de Sheldon, identificou um divertido (tudo bem, pode não ser divertido para a maioria das pessoas) problema, provar que a conjectura de Sheldon, sobre os números com estas propriedades (que ficaram conhecidos como Primos de Sheldon) é verdadeira.

Ou seja, que o conjunto dos Primos de Sheldon, não tem outros elementos além do 73.

Uma demonstração em si não começa do nada, e neste caso não foi diferente.

Este trabalho tem suas raízes com os matemáticos Jessie Byrnes, Chris Spicer e Alyssa Turnquist, que em 2015 publicaram o artigo “The Sheldon Conjecture”.

Nele os autores definem esta conjectura, e analisam de forma exaustiva, todos os casos menores do que 10^{10}, determinando assim, que dentro deste intervalo, o único Primo de Sheldon é o 73.

Este resultado apesar de interessante, ainda é insuficiente para provar a conjectura em si.

Dado que existem infinitos números maiores do que 10^{10}, nos quais resta a dúvida, será que para algum deles, a propriedade de ser Primo de Sheldon, é válida?

Em fevereiro de 2019 (9 anos depois do lançamento do respectivo episódio 73 da série), dois matemáticos, Carl Pomerance e Chris Spicer, publicaram uma demonstração impactante (pelo menos para os matemáticos fãs da série), que de fato, 73 é o único Primo de Sheldon!

Abaixo coloco um pouco destas duas pessoas notáveis.

Carl Pomerance: professor de matemática emérito do John G. Kemeny Parents no Dartmouth College e também professor pesquisador emérito da Universidade da Geórgia. Os ex-cargos incluem professor do Ensino Médio em Revere, MA, e membro da equipe técnica da Bell Labs. Sua pesquisa é principalmente em teoria analítica, combinatória e computacional de números. Ele considera Paul Erdős, que sempre apreciou um problema divertido, sua maior influência.

Chris Spicer: professor associado de matemática na Morningside College. Ele recebeu seu Ph.D. da Universidade do Estado de Dakota do Norte em 2010. Ele é um ávido observador da série The Big Bang Theory e sempre foi fascinado pela matemática na cultura popular.

A demonstração desta conjectura está disponível na internet a partir do artigo “Proof of the Sheldon Conjecture”, de 2019.

Mas acho interessante tratar aqui de alguns pontos desta demonstração (em linhas gerais, pois me desculpem, nem de longe tenho capacidade para demonstrar algo deste nível).

Provar exaustivamente algo para infinitos casos é obviamente impossível, mas mesmo para um conjunto finito de casos, as vezes é absurdamente difícil.

Neste trabalho, Carl Pomerance e Chris Spicer começam restringindo os números com possibilidade de serem Primos de Sheldon a algo entre 10^{10} e 10^{45}.

Isto por que eles consideram uma importante propriedade da matemática demonstrada em 1962, que determina uma densidade nos números primos à medida que avançamos ao infinito.

Neste caso, conhecendo a quantidade aproximada de números primos existentes, foi possível determinar que para nenhum número acima de 10^{45}, possa existir um outro primo com as características de um Primo de Sheldon.

Mas ainda assim, provar exaustivamente para todos os 10^{45} restantes, é demasiadamente impossível com a computação atual.

Mas a matemática aliada a computação não é tão simplória a ponto de apenas tentar exaurir todos os casos um a um.

Nesta situação, os autores começaram a determinar casos excludentes dentre os Primos de Sheldon, como por exemplo:

A) Algum dos termos de um candidato a Primo de Sheldon, ter zero (pois falharia na propriedade de multiplicar seus termos e chegar no valor da sua posição na ordem dos primos);

B) Todos os pares serão excluídos e também todos os números que começam com um termo par também são excluídos (pois o espelho deste número seria então um número par);

C) Os números com final 5 (seriam múltiplos de 5) ou começo 5 (seu espelho seria múltiplo de 5).

D) Na sequência dos números primos, excluímos todos aqueles que não são formados pelo produto de (2i).(3j).(5k).(7m), pois os termos do número candidato a Primo de Sheldon serão multiplicados para formar o termo da sequência dos números primos, deste modo temos o produto de termos entre

1 e 9, que pode ser decomposto na forma (2i).(3j).(5k).(7m).

Em resumo, com muita matemática e computação, foi possível reduzir estes números a um conjunto tratável computacionalmente.

Os candidatos a Primo de Sheldon foram então verificados, e para todos os candidatos, o resultado foi negativo.

Ou seja, não existem números entre 10^{10} e 10^{45} que satisfaçam a propriedade de ser Primo de Sheldon.

Somado isto aos resultados de que nenhum Primo de Sheldon poderia ser maior que 10^{45} e que já se verificou o 73 como único Primo de Sheldon abaixo de 10^{10}, o artigo encerra concluindo que de fato, 73 é o único Primo de Sheldon!

Este resultado reflete um pouco daquilo que é atualmente a pesquisa em matemática pura.

Pois mesmo um teorema (dado que a conjectura foi provada como verdadeira, agora podemos chamá-la de teorema), que muitos poderiam tentar provar analiticamente (e falhar), pode ser provada com o auxílio computacional (e é claro, matemática de alto nível).

Sobre a Autora

EMANUELLY DE PAULA é Licenciada em Matemática pela USP, Especialista em Informática aplicada à Educação pelo IFRJ, Mestre e Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela UNESP e UNICAMP respectivamente. Atualmente é professora do IFRJ, campus Duque de Caxias e gerencia os Blogs Zero e M^3 desde suas fundações.