M^{30}

VOLUME 4

Por

EMANUELLY DE PAULA

blogs.unicamp.br/zero

blogs.unicamp.br/m3

Introdução

M^{30} é um projeto de Divulgação Científica de Matemática que incorpora na forma de Ebooks, os textos produzidos semestralmente pelos Blogs de Divulgação Científica de Matemática, Zero e M^3 (conhecido também como Matemática Multimídia), ambos vinculados ao projeto Blogs de Ciências da Unicamp (blogs.unicamp.br).

O Blog Zero teve sua origem em 01 de junho de 2019, focado na intersecção da ludicidade com o formalismo matemático. Nessa dimensão ampla são perpassados tópicos muito diversos, desde discussões sobre gênero, política, animes, ensino, jogos, contos (até alquimia), mas sempre alicerçados em conhecimentos científicos e vistos sob a lente de conceitos relacionados à Matemática.

O Blog M^3 surge em 18 de junho de 2020 como uma forma de revisitar as experiências envolvidas na coleção Matemática Multimídia (m3.ime.unicamp.br) que completava 10 anos e passava por uma atualização de seus conteúdos. Neste espaço colaborativo, professores e pesquisadores com quaisquer grau de experiência no uso da coleção Matemática Multimídia, podem compartilhar seus relatos e trazer ideias diferentes para combinar, associar ou reutilizar os recursos disponíveis.

ÍNDICE

1. A pirâmide de hambúrgueres do Deus Netuno

blogs.unicamp.br/zero/2264 (07/07/2020)

No episódio 38 de Bob Esponja, intitulado “A Espátula De Netuno”, Bob Esponja retira a espátula dourada da pedra (referência à Rei Arthur e a Excalibur) e assim recebe o título de cozinheiro digno do Deus Netuno.

Porém o próprio Deus Netuno vem recebê-lo mas despreza sua forma de esponja, preferindo qualquer um ali em vez dele.

O resultado é que impõe um desafio ao Bob Esponja, um concurso no qual quem fizer primeiro 1.000 hambúrgueres será o vencedor.

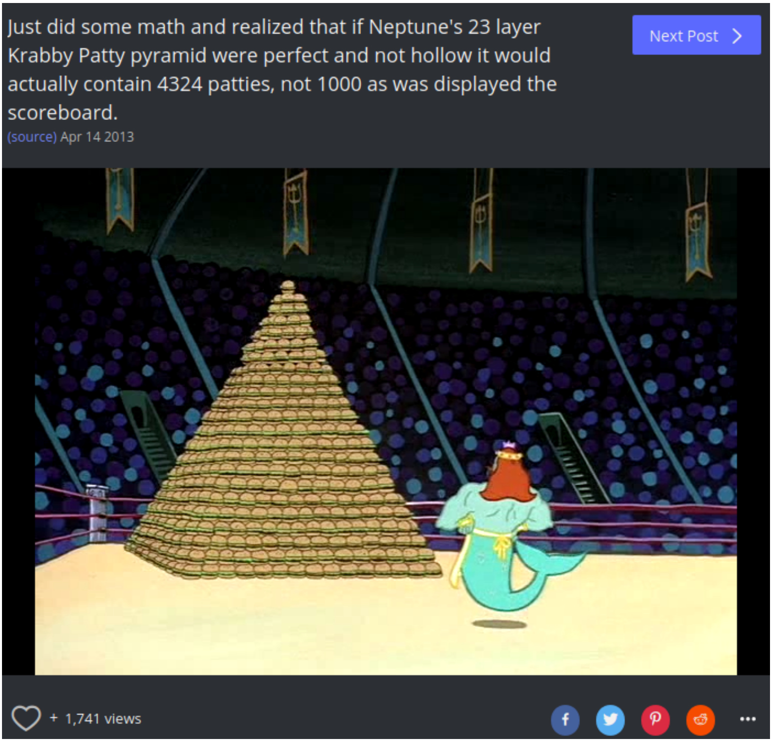
Deus Netuno faz os hambúrgueres com seus poderes e criaturas marinhas que o servem, enquanto Bob Esponja faz seu primeiro hambúrguer com carinho… mas isso não vem ao caso.

O ponto é, Deus Netuno termina os 1.000 hambúrgueres formando uma espécie de pirâmide de base quadrada.

Então vem a questão, é possível empilhar estes 1.000 hambúrgueres desse jeito?

Pois bem, a internet é um mundo à parte, e nem de longe fui o primeiro a pensar nisso.

Na imagem abaixo, tem uma postagem de 2013 falando sobre esta mesma questão…



Fonte: https://imgur.com/r/spongebob/3jyiHOY

O autor desta postagem fez um cálculo simples, dado uma pirâmide de 23 andares, de cima para baixo, o último andar tem 1^2 hambúrguer, o penúltimo 2^2 hambúrgueres, o antepenúltimo 3^2, o seguinte 4^2, 5^2, 6^2… até 23^2.

Somando todos os andares teríamos 4.324 hambúrgueres.

Tudo bem, parece resolvido, mas se formos contar exatamente quantos hambúrgueres temos visíveis em cada fileira, perceberemos que várias delas tem quantidades repetidas, para ser mais preciso, temos de cima para baixo: 1; 2; 2; 3; 3; 4; 5; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 10; 10; 11; 11; 12; 13; 14; 14; 15; 15.

Se elevarmos ao quadrado cada uma dessas quantidades e depois somarmos… não obteremos 1.000 hambúrgueres… sim chegaremos em 2.008 hambúrgueres.

Mas você que adora Bob Esponja, não se preocupe, vamos consertar isso aqui… primeiro vamos a algumas regras, nenhum superior pode ter mais hambúrgueres do que um andar inferior.

Por exemplo, se no andar 1 temos 100 hambúrgueres, no andar 2 devemos ter no máximo 100 hambúrgueres.

Outro ponto que vamos fixar para começar nossa análise é que a pirâmide tem 23 andares.

Por fim, o último andar da pirâmide tem exatamente 1 hambúrguer e o penúltimo tem exatamente 4.

Apenas para deixar as coisas mais interessantes… vamos nos limitar a ter no máximo 2 andares com a mesma quantidade de hambúrgueres.

Assim, se no andar 5 temos 64 hambúrgueres, o andar 4 ou (no sentido excludente) o andar 6 podem ter também 64 hambúrgueres, mas não ambos.

Nestas condições, o mínimo de hambúrgueres que teríamos seria:

Andar	Hambúrgueres
23	1
22	4
21	4
20	9
19	9
18	16
17	16
16	25
15	25
14	36
13	36
12	49
11	49
10	64
9	64
8	81

7	81
6	100
5	100
4	121
3	121
2	144
1	144

Cuja soma dá 1.299.

Um ponto que podemos pensar também, é que a pirâmide não seja de base quadrada e sim retangular, ou seja, há um número de hambúrgueres visíveis de um lado e um número visível do outro e não necessariamente ambos são iguais.

Vamos manter a regra do 23º andar ter 1 hambúrguer, do 22º andar ter 4 hambúrgueres, e fazendo a contagem que apresentei anteriormente, vamos tentar estipular quantos hambúrgueres deveriam ter do outro lado para formar esta pirâmide com exatamente 1.000 hambúrgueres, mantendo é claro as mesmas regras anteriores.

Andar	**Supus**	**Contei**	**Hambúrgueres**
1	**1**	1	1
2	**2**	2	4

3	**2**	2	4
4	**2**	3	6
5	**3**	3	9
6	**3**	4	12
7	**3**	5	15
8	**3**	6	18
9	**3**	7	21
10	**3**	7	21
11	**3**	8	24
12	**4**	8	32
13	**4**	9	36
14	**5**	10	50
15	**5**	10	50
16	**5**	11	55
17	**5**	11	55
18	**6**	12	72
19	**6**	13	78
20	**6**	14	84
21	**7**	14	98
22	**8**	15	120
23	**9**	15	135

Sim, observe que agora temos um total de hambúrgueres igual a 1.000.

Porém você pode estar pensando, você supôs vários andares com as mesmas quantidades de hambúrgueres… isso era contra a regra, não é?

Errado, antes estávamos trabalhando com pirâmides de base quadrada, ou seja, lado*lado.

Porém agora estamos com pirâmides de base retangular, a condição diz que nenhum andar pode ter uma quantidade de hambúrgueres maior que seu andar anterior, e no máximo dois andares seguidos podem ter a mesma quantidade de hambúrgueres.

Observe que estas condições nada se aplicam a quantidade de hambúrgueres do lado que eu precisei supor, basta que a coluna da direita que determina quantos hambúrgueres temos em cada andar esteja de acordo com estas regras.

No caso da pirâmide quadrada, as duas afirmações eram equivalentes, pois se eu tivesse três andares seguidos com a mesma quantidade de hambúrgueres, obrigatoriamente eu teria três lados da pirâmide seguidos com a mesma quantidade visível de hambúrgueres.

Porém quando mudamos a definição para uma pirâmide de base retangular, esta equivalência se perde, pois estamos agora considerando os hambúrgueres totais daquele andar, e isto não pode ser obtido apenas com a informação de um dos lados visíveis.

Isso aumenta nossa flexibilidade de tratar o problema, permitindo assim encontrar a solução que foi apresentada.

Esse é um post simples, mas que no fundo discute uma coisa da qual os matemáticos são muito chatos, a forma correta de definirmos as componentes.

Poderia parecer irrelevante uma pirâmide de base quadrada para uma pirâmide de base retangular, mas esta simples mudança na definição, já nos deu a maleabilidade necessária para resolver este problema que como mostramos anteriormente, não tinha solução com uma pirâmide de base quadrada.

Assim fica o conselho, preste bastante atenção nas definições antes de começar a atacar um problema, e veja se elas possibilitam a solução… em todo caso, verifique se elas estão corretas.

2. Quem passa x dividindo sem especificar um domínio não-nulo

blogs.unicamp.br/zero/2283 (27/07/2020)

Nesses dias (final de julho/2020) circulam vários memes de pessoas fazendo coisas supostamente absurdas e sendo representadas como criaturas gigantescas e monstruosas, enquanto um simples humano na cena seria o diabo perto destas pessoas.

Acho muito engraçado essas comparações, porém teve uma da qual gerou um pouco de "discussão" entre meus amigos.

Peço perdão mas não sei a fonte dessa imagem, simplesmente apareceu no meu caminho. Mas a imagem original pode ser encontrada em http://www.guiadosquadrinhos.com/personagem/cthulhu-/40557

A questão desse meme é que na matemática precisamos especificar sempre o domínio de uma divisão como sendo não-nulo.

Ou seja, para uma variável no denominador, garantir os valores que levam o denominador a 0, não devem ser considerados. Isso basicamente é “especificar um domínio”.

Por exemplo, dizer que um número primo é todo número que apenas pode ser divisível por 1 e por ele mesmo, isso estaria errado se não especificarmos o domínio dessa propriedade.

Se ela estiver nos racionais/reais/irracionais, então não existem números primos, dado que qualquer número destes 3 conjuntos podem ser divididos por infinitos números.

Contudo, se especificamos o domínio nos números Inteiros, também estamos dizendo que não existem números primos, pois todo número diferente de 0 pode ser dividido por -1 e pelo seu oposto aditivo.

De modo mais geral, esta definição de números primos vale apenas para o domínio dos números naturais.

Observe no parágrafo acima, que quando mencionei que todo número Inteiro pode ser dividido pelo seu oposto aditivo, me lembrei de tirar o 0.

Fiz isso pois o oposto aditivo do 0 é o próprio 0, e a divisão por 0 não é definida.

São cuidados assim que justificam a coerência deste meme.

Ainda que isso pareça um tanto trivial, ou até óbvio, aposto que você já viu um “truque” mostrando como chegar que 2=1. Se não viu, vamos ver agora:

Seja $a = b$;

$a^2 = b.a$;

$a^2 - b^2 = b.a - b^2$;

$(a+b).(a-b) = b(a-b)$;

dividimos ambos os lados por $(a-b)$;

$(a+b) = b$;

Sendo $a+b = b$, como $a = b$, temos:

$(a+a) = a$;

$2a = a$;

dividimos ambos os lados por a;

$2 = 1$.

Veja que legal, chegamos em $2 = 1$, mas porque?

A resposta é simples, porque não especificamos um domínio não-nulo.

Isso aconteceu quando dividimos ambos os lados por (a-b), pois sendo a=b, a-b = 0, logo nesta etapa dividimos por 0, que é uma operação não definida. Isto permite chegarmos em qualquer resultado (literalmente), pois a divisão por 0 seria um absurdo, e não há sentido prosseguir após um absurdo, dado que o podemos tirar o que quiser a partir dele.

Espero ter deixado claro a explicação deste meme, pois haja maldade no coração daqueles que passam x dividindo sem especificar um domínio não-nulo, que até o diabo se assusta diante destas pessoas.

Apenas por curiosidade, a relação da matemática com temas "diabólicos" não é nem um pouco incomum.

O filósofo Santo Agostinho (354 – 430 d.C.) já adverte que "O bom cristão deve permanecer alerta contra os matemáticos e todos aqueles que fazem profecias vazias.

Existe o perigo de que os matemáticos tenham feito uma aliança com o demônio para obscurecer o espírito e confinar o homem às amarras do Inferno."

Também tem um livro muito legal chamado "O diabo dos números" do autor Hans Magnus Enzensberger.

A história se passa ao redor de um garoto chamado Robert que é constantemente assombrado por pesadelos envolvendo uma matemática incompreensível na qual ele sempre está errado, até que começa a ter sonhos com um demônio chamado Teplotaxl, que faz todo o tipo de bruxarias com números e lhe muda a maneira de ver a matemática.

É uma leitura simples e muito agradável, até minha mãe que tem uma certa aversão à matemática leu este livro e gostou bastante.

3. Pokemon Crystal – não compre/capture, adote!

blogs.unicamp.br/zero/2272 (08/08/2020)

Neste post trataremos de classes e subclasses.

Na matemática uma classe é uma coleção de objetos que compartilham de uma mesma propriedade.

Por exemplo, a classe dos “abridores de lata”, no caso não me importa se eles são para destros, canhotos, manuais, elétricos, ou sua cor, formato, ou qualquer outra característica que os diferencie.

Mas todos estes objetos compartilham da característica de “abrir latas”.

Assim, uma subclasse é uma classe contida em outra classe.

Por isso, uma subclasse herda a propriedade da classe, ou seja, os “abridores de lata para canhotos” é uma subclasse dos “abridores de lata”.

Desse modo, eles herdam a característica de abrir latas, porém compartilham de uma característica comum (ser utilizada com a mão esquerda).

A alguns meses escrevi um post sobre Pokémon Red discutindo um pouco o termo conjectura e utilizando deste jogo como exemplo para formular uma (seria possível zerar o jogo, ou seja, derrotar todos os ginásios, a Elite4 e seu rival, sem capturar pokémons e nem tratá-los como mercadorias, adquirindo-os no comércio ou em cassinos).

Dentro desta hipótese, mostramos no volume 3 deste livro, que isso era possível para os pokémons iniciais Bulbasaur e Charmander, mas não para o Squirtle.

Nesse sentido, temos uma classe chamada Pokemon – versões para gameboy e gameboy color.

Essa classe engloba os seguintes jogos:

Pokemon Red

Pokemon Green

Pokemon Blue

Pokemon Yellow

Pokemon Gold

Pokemon Silver

Pokemon Crystal

Estas 7 versões apresentam várias características comuns (botões de comando, mobilidade, ações de combate, golpes dos pokémons, tipos dos pokémons, vantagens e desvantagens, entre outros), que possibilita engloba-las nesta classe maior.

Podemos entretanto tratar de subclasses desses jogos, como por exemplo a partir da quantidade de pokémons disponíveis em cada versão.

Teríamos assim a classe com os pokémons do 1 ao 151 (Red, Green, Blue, Yellow, Gold, Silver e Crystal) e a subclasse com os pokémons do 1 ao 251 pokémons (Gold, Silver e Crystal).

Ou seja, nesta subclasse temos os mesmos 151 pokémons da classe anterior mais 100 pokémons.

Com esta ideia de classes e subclasses, quando ignoramos o contato com pokémons selvagens e a aquisição de pokémons pelo comércio ou cassinos, reduzindo o objetivo do jogo a derrotar os ginásios, a Elite4 e nosso rival, podemos dizer que:

Classe Pokemon – engloba as versões Red, Green, Blue, Yellow, Gold, Silver, Crystal;

Pokemon (RGB) – engloba as versões Red, Green e Blue;

Pokemon (Y) – engloba apenas a versão Yellow;

Pokemon (GS) – engloba as versões Gold e Silver;

Pokemon (C) – subclasse dentro da subclasse Gold e Silver, engloba apenas a versão Crystal.

Pokemon Red, Pokemon Green e Pokemon Blue pertencem a mesma subclasse.

Ou seja, se no post anterior mostrei que era possível zerar Pokemon Red começando com Bulbasaur ou Charmander, mas não com o Squirtle, então isso vale também para Pokemon Green e Blue, ainda que não tenha jogado para mostrar.

Isto pois estes três jogos apresentariam as mesmas características e possibilidades de crescimento quando consideramos a propriedade de ignorar o contato com pokémons selvagens e apenas adotar pokemons.

Assim, resolvendo esta conjectura para uma versão, podemos generalizar para as outras duas versões que pertencem a esta mesma classe.

Mas isso não se estende por exemplo para a versão Yellow, que embora tenha dos pokémons 1 ao 151, ela apresenta características de jogo distintas à esta propriedade aplicada, que fazem deste um jogo diferente das outras 3 versões.

Pokemon Yellow então é uma subclasse dos jogos de Pokemon, mas não está na subclasse que provamos. Sendo na verdade uma subclasse independente das outras.

Um outro caso, e que é o tema deste post, refere-se à Pokémon Crystal.

As versões Pokémon Gold e Silver são subclasses de Pokemon, porém a versão Crystal está dentro desta subclasse.

Ou seja, todos os elementos presentes em Gold e Silver também fazem parte do Crystal, contudo esta versão tem características a mais do que a Gold e Silver.

O que a caracteriza como uma subclasse desta subclasse da classe Pokemon.

Aplicando a conjectura de apenas adotar em Pokémon Crystal chegamos que das 3 escolhas iniciais, apenas começando com o Totodile (um pokémon de água que se parece com um jacaré bípede) é possível zerar nos objetivos estipulados.

A prova disso segue neste vídeo.

https://youtu.be/0PPepzCNKZA

Levei umas 4h40 jogando para finalizar (obrigado Théo pela edição)

De forma bem resumida, o que impede de zerar esta versão começando com Cyndaquill ou Chicorita, é uma complexidade para conseguir as pedras de evolução que levariam algum dos seus pokémons adotados (no caso, o Eevee) a ser compatível com o HM03 (surf).

Pois enquanto na versão Red bastava irmos no centro comercial e adquirir a pedra da água, nesta geração precisamos pegar o contato de telefone de alguns personagens e aguardar que eles nos ligam avisando que tem uma coisa do nosso interesse… o que realmente pode demorar para acontecer (para vocês terem uma ideia do fator sorte neste requisito, nas quase 5h jogando, este personagem não chegou a me ligar).

Assim, podemos pensar… se consegue zerar a versão Crystal e as versões Gold e Silver das quais a Crystal é subclasse, isso garante que a versão Gold e Silver é zerável nesta propriedade de apenas adotar?

Errado!

Assim como o exemplo com abridores de lata, mostrar que para algum elemento de uma subclasse foi possível realizar esta ação, isto não engloba necessariamente os elementos pertencentes a classe (por exemplo, abridores de lata industriais abrem as latas automaticamente, porém isso não se generaliza a todos os que fazem parte da classe de abridores de lata).

Desse modo, temos a certeza de que não é possível zerar a versão Crystal começando com Cyndaquill ou Chicorita, por um motivo que foi herdado da sua classe.

Então, este resultado também se aplica às versões Gold e Silver.

Contudo, sendo a versão Crystal mais robusta em recursos do que as versões Gold e Silver (você por exemplo ganha um Odd Egg que pode ser chocado e somar ao seu time um pokémon diferente daqueles que você adota naturalmente), provar que nela é possível zerar, não pode ser estendido de imediato para as classes mais genéricas.

Resumindo:

Mostrar que é zerável em Gold implica que é zerável em Silver e Crystal;

Mostrar que é zerável em Silver implica que é zerável em Gold e Crystal;

Mostrar que é zerável em Crystal, não implica que é zerável em Gold ou Silver.

4. Como se dar bem enfrentando ao mesmo tempo 10 mestres no xadrez sem saber jogar?

blogs.unicamp.br/zero/2313/ (10/08/2020)

A alguns dias circulou na internet um meme de um garoto de 8 anos que enfrentava ao mesmo tempo vários mestres do xadrez… e o meme dizia que ele perdeu de todos.

A ironia do meme gira em torno do fato de ser fácil enfrentar vários mestres ao mesmo tempo no xadrez, o difícil é ganhar deles…

Contudo, se você é leitor do meu blog, sabe que a matemática é uma tremenda ferramenta para várias gambiarras da vida, entre elas enfrentar 2.n mestres do xadrez ao mesmo tempo e ter entre n derrotas e n vitórias, ou até mesmo 2.n empates.

Sendo n um número natural qualquer maior ou igual a 1.

O mais interessante disso, é que você sequer precisa saber como jogar xadrez para isso.

Basta ter uma noção leve de funções compostas.

Sim, o que uma função composta pode me ajudar neste desafio?

É isso que vamos ver.

Relembramos um pouco a ideia de funções compostas:

Seja x um elemento do domínio da função F, a função F aplicada à x gera F(x), que pode ser entendido como um elemento y do domínio da função G, que aplicada à y gera G(y).

Contudo, G(y) = G(F(x)).

Ou seja, G(F()) é uma função composta que utiliza o domínio de F.

A ideia aqui é enfrentar n jogadores utilizando as peças pretas e n jogadores utilizando as peças brancas.

Para os J1, J2, J3, …, Jn jogadores que começarem com as peças brancas, repetiremos suas ações contra os jogadores J(n+1), J(n+2), J(n+3), …, J(2n).

Em contrapartida, quando os jogadores J(n+1), J(n+2), J(n+3), …, J(2n), reagirem à jogada, repetiremos esta reação contra os jogadores J1, J2, J3, …, Jn.

Com isso, estaremos na verdade atuando como uma função composta que recebe de um domínio um valor x (a jogada de um oponente) e transforma em um valor y (jogada de resposta ao outro adversário).

Por fim, para cada dupla que “mediamos” podemos ter uma vitória e uma derrota, ou dois empates.

Nos casos extremos, teremos n vitórias e n derrotas, ou 2.n empates.

Agora que você aprendeu este truque de funções compostas, vá por aí e desafie qualquer quantidade par de mestres de xadrez, e garanta que você terá entre 2.n empates a n vitórias!

E o melhor, dá para fazer isso sem sequer saber como joga xadrez.

5. O dia que conheci M³. Cavalieri

blogs.unicamp.br/m3/223 (23/08/2020)

A quase 10 anos, entrei em uma situação delicada enquanto ministrava aula para o Ensino Médio.

Discutíamos probabilidade geométrica, e neste contexto trouxe exemplos de área e volume, incluindo o volume da esfera.

Diante da expressão que representa este volume, veio a indagação de como tal resultado era obtido… ou seja, como descobrimos que o volume de uma esfera se calcula daquele jeito?

Livros didáticos estão cheios de exemplos e procedimentos dedutivos para o cálculo da área de um círculo, mas uma esfera é um pouco mais complexo e não me recordo até hoje de encontrar exemplos de seu cálculo em livros didáticos.

De todo modo, me sentia no dever de levar uma resposta aos alunos até a aula da semana seguinte.

Na minha cabeça isso era claro, bastava usar integração, mas estava lidando com alunos do Ensino Médio… seria um buraco um tanto fundo discutir integração para enfim resolver este esclarecimento.

Uma ideia “meio traiçoeira” do ponto de vista da matemática formal, seria levar sólidos geométricos de acrílico disponíveis no laboratório de educação matemática e mostrar que a água suficiente para encher dois cilindros é a mesma capaz de encher 3 esferas “esferoscritas” nele (e com isso mostrar que o volume da esfera é 2/3 do volume do respectivo cilindro).

Isso funciona, mas é um caso bastante específico e que envolve a própria imprecisão de um experimento físico (como o acréscimo de mais ou menos água, sua retenção ou derramamento lateral).

Assim, precisava de uma justificativa um pouco mais formal para este fato, porém não formal o bastante para precisar discutir sobre integração.

A solução veio na forma do seguinte vídeo que encontramos na internet em uma plataforma da qual já havia ouvido falar, um tal de M³.

https://youtu.be/2pP9aR4nkQc

Isso era em 2011, e esse vídeo veio como uma luva para resolver o problema, que curiosamente, apesar de estar cursando o 6º semestre de matemática em uma das melhores universidades do país, foi apenas nesse dia entendi como uma propriedade que passa batido no decorrer das nossas formações, pode servir como uma brilhante explicação para esta relação entre volumes.

Dessa forma, fiquei muito grato ao M³ por me apresentar com mais propriedade didática o famoso Princípio de Cavalieri.

Após o uso do vídeo com os alunos, viemos a trabalhar com o experimento dos sólidos de acrílico para situar melhor aquela relação.

No repositório do M³ há mais orientações e um guia do professor para auxiliar no uso deste material (aprovo e recomendo), seu link encontra-se logo abaixo:

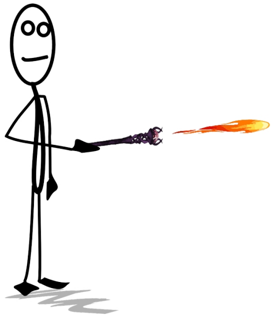
https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040

6. Poder ou precisão?

blogs.unicamp.br/zero/2322 (29/08/2020)

D&d (Dungeons and Dragon) é um popular sistema de RPG geralmente ambientado no contexto de um mundo medieval fantasia.

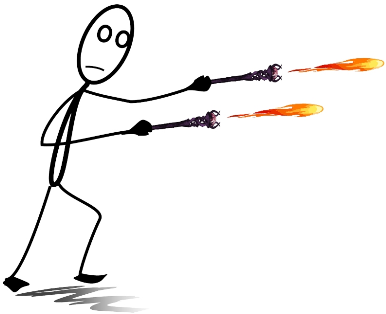
Neste jogo, a varinha que lança bolas de fogo é um item bastante cobiçado entre os personagens/jogadores, pois dá ao seu portador o poder de disparar bolas de fogo na direção que ela aponta.



Personagem usando a varinha para lançar bola de fogo.

Assim, cada disparo tem um fator de precisão que chamaremos de x1 e um dano referente à bola de fogo atingir seu alvo que chamaremos de y.

Contudo, os jogadores nunca viveram realmente num mundo medieval fantasia (percebe a hipocrisia…) logo pensam que se conseguem segurar a varinha com apenas uma mão, poderiam muito bem usar duas varinhas e assim disparar ao mesmo tempo duas bolas de fogo.



Personagem usando duas varinhas para lançar bolas de fogo.

Assim, cada disparo de cada varinha tem um fator de precisão que chamaremos de $x2$ e um dano referente à bola de fogo atingir seu alvo que chamaremos de y.

Esta estratégia é bem aceita, os jogadores assumem que quanto mais poder de fogo melhor, afinal, se todos os ataques acertarem, causarão o dobro de dano.

O quanto ela influencia nesta história?

Bom, eis aqui nossa discussão

Para começar, temos que $x1 > x2$, pois a precisão ao disparar duas varinhas obrigatoriamente deve ser menor do que ao disparar apenas uma.

Assim, $x2 = a1.x1$ onde $0 < a1 < 1$.

Por exemplo, se a precisão de acerto com uma varinha fosse 100% e a1 fosse 0,8.

Teríamos x2 = 80%.

Assim, com uma varinha temos 100% de chance de acertar o alvo e tirar dele y de dano.

Com duas varinhas, temos 64% de chance de acertar o alvo com as duas varinhas e tirar 2.y de dano, 32% de chance de acertar o alvo com uma das varinhas e tirar y de dano, e 4% de chance de errar o alvo com as duas varinhas e não tirar dano algum.

Nessa perspectiva, no tempo necessário para lançar 200 bolas de fogo, acertaremos em média 160 delas, enquanto que com apenas uma varinha tiraríamos neste mesmo tempo o dano de 100 bolas de fogo.

Mas você pode estar pensando que o personagem com 100% de precisão com uma varinha seja muito, vamos então supor que ele tenha 80% de precisão com uma varinha, ou seja x1 = 80% e x2 = a1.x1, com a1 = 0,8.

Ou seja, x2 = 64%.

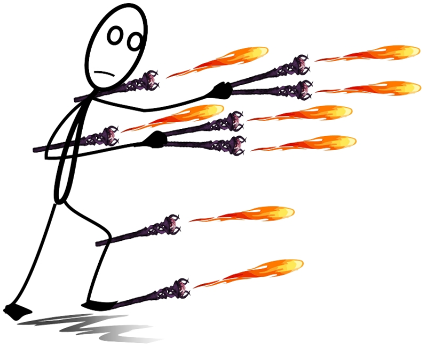
Nesse contexto, com duas varinhas temos 41% de chance de acertar o alvo com duas bolas de fogo ao mesmo tempo, 46% de chance de acertar o alvo com apenas uma das varinhas e 13% de chance de não acertar o alvo com nenhuma varinha.

Nessa perspectiva, no tempo necessário para lançar 200 bolas de fogo, acertamos em média 128 delas, enquanto que com apenas uma varinha tiraríamos neste mesmo tempo o dano de 80 bolas de fogo.

Mas por que parar por aí?

Vamos ser mais ousados, se a cada acréscimo de uma varinha temos apenas 80% da precisão anterior, ou seja $x1 = 0,8$, $x2 = (0,8)^2$, $x3 = (0,8)^3$, $x4 = (0,8)^4$, …, $x8 = (0,8)^8$, vamos ver o que acontece se nos colocamos a disparar com 8 varinhas ao mesmo tempo?

Será um bom negócio?



Personagem usando oito varinhas para lançar bolas de fogo.

Nesse contexto, temos $x8 = 16,8\%$, algo muito próximo da chance de 1 dado de 6 faces cair no número 1 (16,7%).

Assim, disparar as 8 varinhas ao mesmo tempo seria algo muito próximo de lançar os 8 dados ao mesmo tempo e contar quantos deles caíram no número 1.

A chance de não acertarmos nenhuma bola de fogo no alvo neste caso é de 23%.

A chance de acertarmos uma bola de fogo no alvo neste caso é de 37%.

A chance de acertarmos duas bolas de fogo no alvo é de 52%.

A chance de acertarmos três bolas de fogo no alvo é de 31%.

A chance de acertarmos quatro bolas de fogo no alvo é de 10%.

A chance de acertarmos cinco bolas de fogo no alvo é de 2,1%.

A chance de acertarmos seis bolas de fogo no alvo é de 0,26%.

A chance de acertarmos sete bolas de fogo no alvo é de 0,017%.

A chance de acertarmos oito bolas de fogo no alvo é de 0,0005%.

Nessa perspectiva, no tempo necessário para lançar 800 bolas de fogo, acertamos em média 134 delas, enquanto que com apenas duas varinhas tiraríamos neste mesmo tempo o dano de 128 bolas de fogo.

Surpreendente como aumentar a quantidade de varinhas desta maneira aumentou em média faria o personagem acertar apenas 6 bolas de fogo a mais do que se estivesse usando duas varinhas, não acha?

7. Quem tem medo do gráfico mau?

blogs.unicamp.br/zero/2339 (01/09/2020)

Você já ouviu o termo “exponencial”?

Talvez em um contexto mais ou menos assim:

“Tal coisa tem um crescimento exponencial!”.

Quando este termo aparece associado com prejuízos de qualquer espécie, é algo alarmante, embora para muitas pessoas possa não parecer.

O meme seguinte é referente ao episódio 12 do anime One Punch Man, no qual Lorde Boros enfrentando Saitama, percebe que não poderá medir esforços para derrotá-lo, e então começa a aumentar o seu poder.

Mas isso não acontece de forma logarítmica, linear, quadrática, cúbica… e sim, de modo exponencial.

Vamos dar uma olhada no que isso significa.

Temos uma “ameaça” que esta aumentando seu poder.

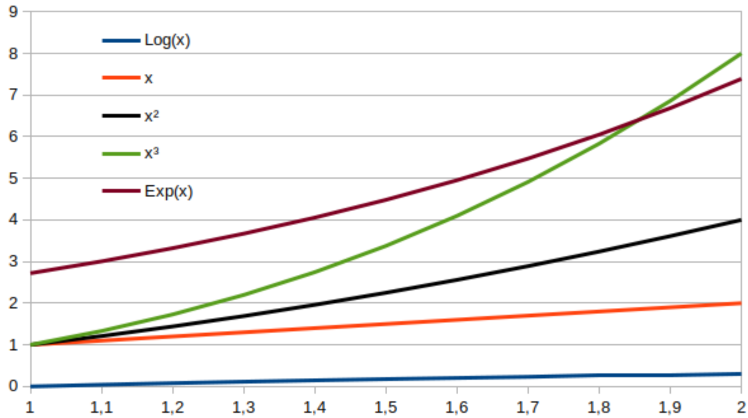
No gráfico abaixo mostramos em cores diferentes o aumento de funções logaritmo, linear, quadrática, cúbica e exponencial.

Veja que a curva logarítmica em azul lá embaixo começou em 0 e quase não se moveu.

A curva linear x em vermelho está bem baixa também, a preta x^2 está um pouco baixa, mas a curva verde x^3 é aquela que mais cresceu neste intervalo.

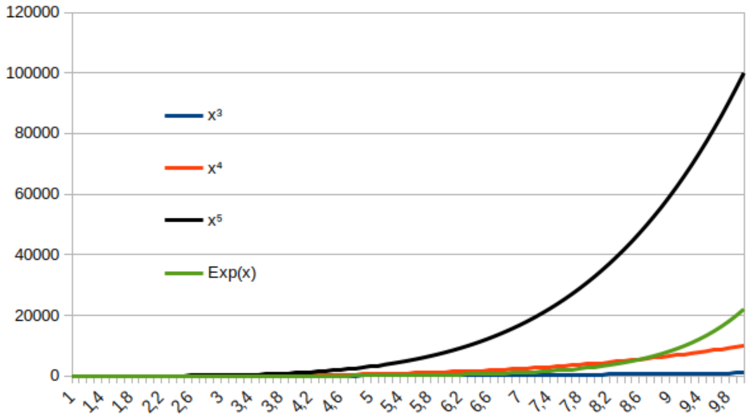
Mais do que a curva exponencial de x, representada por Exp(x).

Isso significa que a curva cúbica é mais terrível que a exponencial?



Vamos continuar esta análise descartando as curvas logarítmica, linear e quadrática, e acrescentando uma curva x^4 e x^5 para vermos o que acontece.

Também vamos aumentar este intervalo agora de 1 até 10.



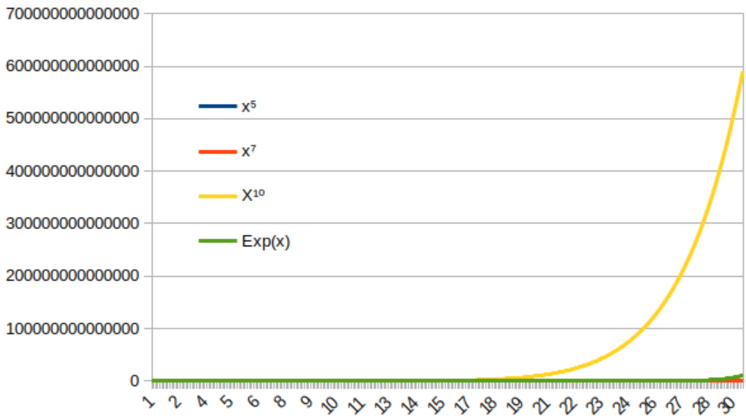
Como você pode ver, a curva x^3 podia estar acima da Exp(x) no intervalo anterior, e também a curva x^4 estava acima da Exp(x) até o ponto 8,6.

Mas após isso Exp(x) passou a valer mais do que ambas, porém bem menos do que x^5.

Isso significa que a curva x^5 é mais terrível que a exponencial?

Vamos continuar esta análise descartando as curvas x^3 e x^4 e acrescentando uma curva x^7 e x^{10} para vermos o que acontece.

Também vamos aumentar este intervalo agora de 1 até 30.



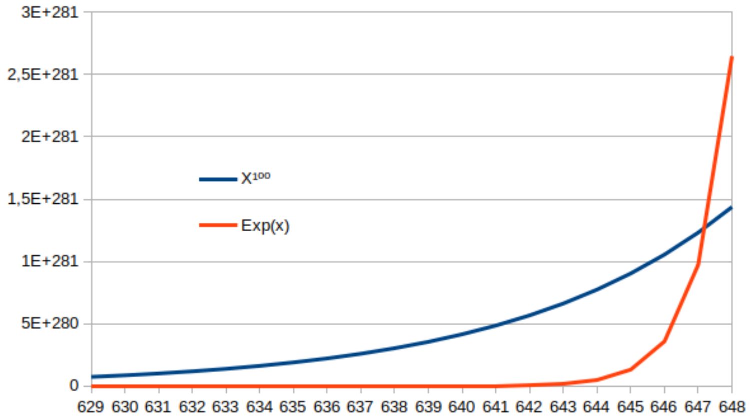
Como você pode ver, a curva Exp(x) aparece um pouco acima da curva vermelha próximo do final do intervalo.

Porém a curva x^{10} em amarelo está bem acima de Exp(x).

Isso significa que a curva x^{10} é mais terrível que a exponencial?

Vamos adiantar essa discussão, seria x^{100} mais terrível que a exponencial?

Vamos considerar apenas estas duas funções e um intervalo entre 629 e 648.



Olha só, no momento da ultrapassagem, a curva exponencial cresceu ainda mais do que uma curva x^{100}.

O mesmo vale para x^{1000} ou qualquer valor fixo ao qual x esteja elevado.

É por isso que lidar com uma ameaça cujo poder cresce exponencialmente é algo tão terrível.

A ironia desse meme é que o poder de Saitama é sempre maior do que qualquer oponente que ele enfrente, ou seja, para ele se o inimigo está aumentando exponencialmente seu poder, está tudo “Ok”, dado que o combate terminará tranquilo pro seu lado.

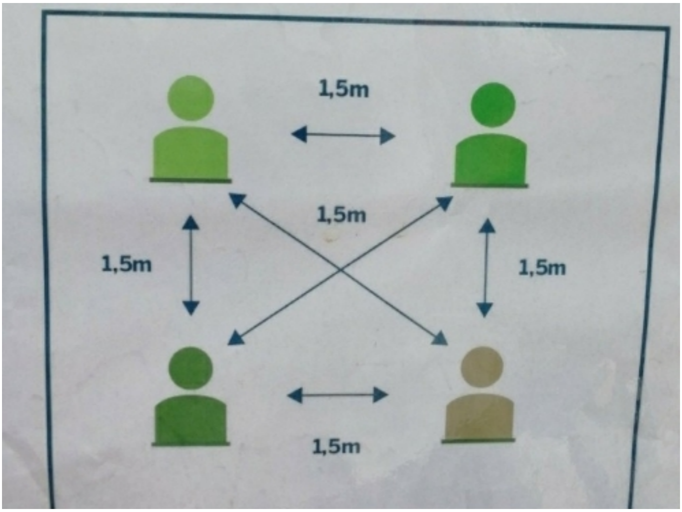
Contudo, para qualquer outra criatura, ver uma ameaça com poder crescendo de maneira exponencial e achar que está tudo “Ok”, é não compreender o quão terrível este gráfico significa para suas vidas.

Espero que tenham gostado dessa explicação e que possam ter ajudado a refletir sobre o terror que é enfrentar ameaças representadas por curvas exponenciais.

8. CALMA PITÁGORAS… A GENTE RESOLVE

blogs.unicamp.br/zero/2367 (05/10/2020)

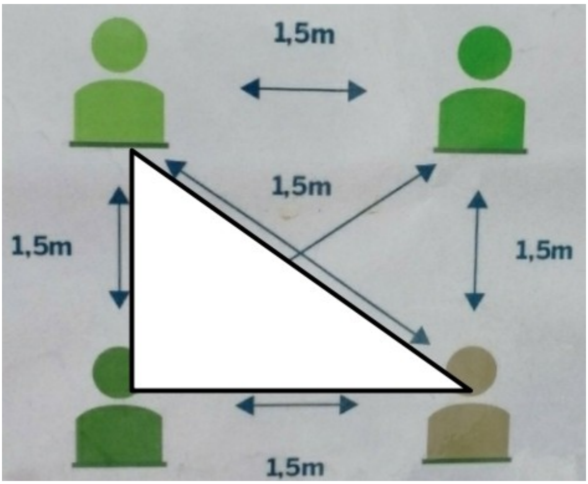
Com a atual pandemia a necessidade de distanciamento dentro dos estabelecimentos públicos fez com que vários materiais propondo essa distância segura fossem criados… entre elas, temos a imagem abaixo que virou um meme envolvendo o Matemático Grego Pitágoras (570 – 495 a.C.) sendo detido por outros colegas das Ciências para não surtar diante dessa imagem.



O motivo de Pitágoras estar surtando diante disso, é que vemos a proposta de que 4 pessoas fiquem equidistantes 1,5 m cada uma no plano.

O erro dessa representação pode ser percebido facilmente ao desenharmos um triângulo retângulo como na figura abaixo.

Temos nele que os dois catetos valem 1,5 m e a hipotenusa também vale 1,5 m.

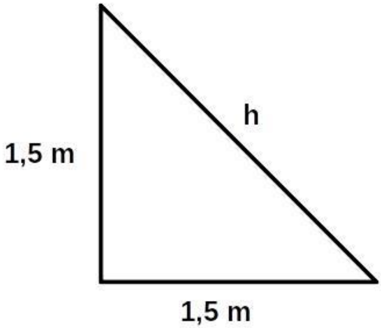


Mas se os três lados são iguais, então não é um triângulo retângulo, e sim um equilátero.

Sim, 3 pessoas podem ficar equidistantes no plano a 1,5 m cada, mas na figura temos 4 pessoas, e isso complica a coisa.

Vamos fazer algumas contas e ver qual valor podemos manter e qual é melhor trocar.

Se a informação dos catetos estiver certa, teremos:



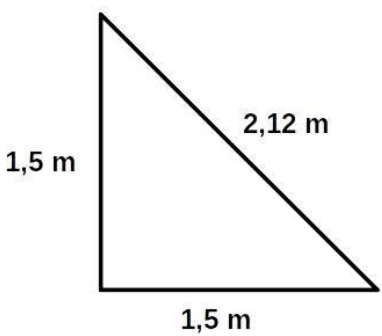
$$1,5^2 + 1,5^2 = h^2$$

$$2,25 + 2,25 = h^2$$

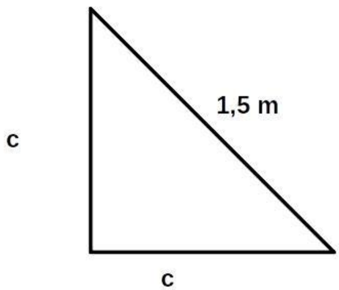
$$4,5 = h^2$$

$$\sqrt{4,5} = h$$

$$2,12 = h$$



Se a informação da hipotenusa estiver certa, teremos:



$$c^2 + c^2 = 1{,}5^2$$

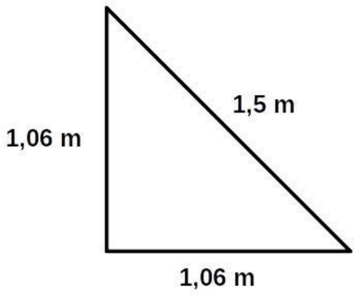
$$2.c^2 = 2{,}25$$

$$c^2 = \frac{2{,}25}{2}$$

$$c^2 = 1{,}125$$

$$c = \sqrt{1{,}125}$$

$$c = 1{,}06$$



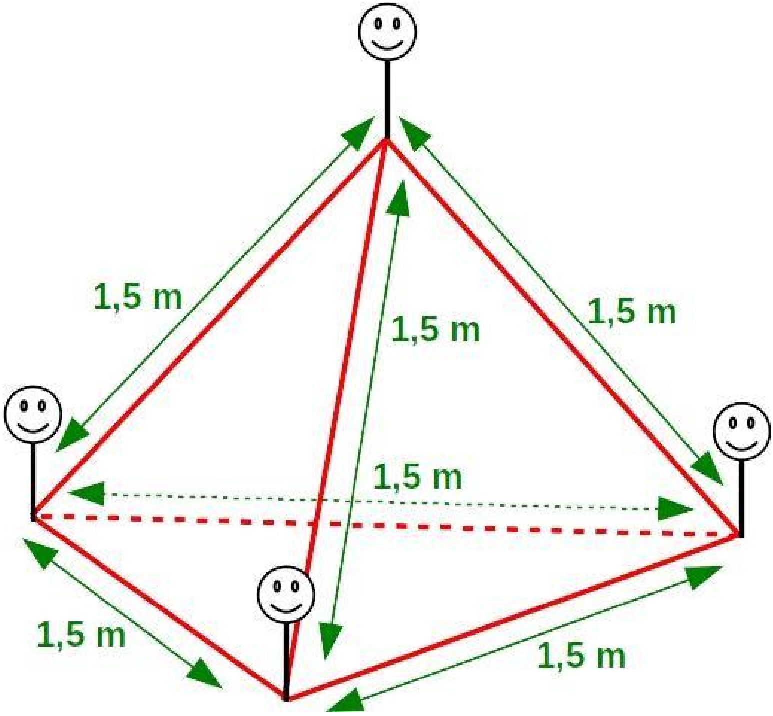
Assim, como desejamos um distanciamento maior entre as pessoas, é melhor adotarmos que os catetos estivessem certos (valeriam 1,5 m) enquanto a hipotenusa estava errada, e neste caso valerá 2,12 m (melhor prevenir do que remediar).

Mas o post não termina aqui… e se na verdade a imagem estivesse certa?

É possível 4 pessoas ficarem equidistantes cada uma 1,5 m?

Como disse antes, no plano não é possível… mas no espaço sim!

No caso, para considerar a imagem inicial correta, precisaríamos imaginar que as 4 pessoas estivessem cada uma em um vértice de um tetraedro regular (uma pirâmide de base triângular na qual todos os seus lados ou faces, tem a mesma medida).



Assim, se o aviso foi feito para uma loja na qual os clientes se distribuem por vértices de tetraedros regulares, ele está correto.

Viu Pitágoras, no fim a gente resolve.

9. Leite no cereal: bebida, caldo ou molho?

blogs.unicamp.br/zero/2384 (08/10/2020)

Esse é um dilema apresentado no contexto de Vila Sésamo a partir do meme abaixo:

A respectiva cena é do episódio "Let's Eat! Funny Food Songs", que pode ser encontrado facilmente no youtube, mas infelizmente esse diálogo entre o garçom Grover (à direita na cena) com o Sr. Johnson (à esquerda na cena) é inventado e só existe na forma de meme (sim, eu assisti ao episódio para verificar).

Mas vamos à respectiva questão que incomoda a maioria de nós que gostamos de colocar leite no cereal.

Qual a resposta para essa complexa pergunta?

O leite no cereal é uma bebida, um caldo ou um molho?

A resposta a essa pergunta dentro da lógica clássica é, sim!

Mas sim o que?

Sim, o leite no cereal é uma bebida OU um caldo OU um molho.

Quando estudamos lógica clássica, temos o conceito de valoração das variáveis, isso significa que elas podem ser verdadeiras ou falsas (o que não existe por exemplo na lógica positiva ou minimal).

E o operador lógico OU (denotado na matemática como $\vee$) só é falso quando ambas as variáveis são falsas.

Assim, sentenças como "se estiver faltando café ou leite, vou ao mercado".

No caso, se faltar café vou ao mercado, se faltar leite vou ao mercado, se faltar ambos, também vou ao mercado. Usualmente esse OU é denotado como “ou-inclusivo”.

Esse OU é muitas vezes confundido com o “ou-exclusivo”, que tem a função de dizer “se um então não o outro”.

Por exemplo: “esse mês vai até o dia 30 ou 31?”

No caso, uma afirmação anula a outra, pois se vai até o dia 30 não poderá ir até o dia 31, e vice-versa.

Contudo, a mesma frase poderia ser interpretada como um “ou-inclusivo” no qual a resposta seria “sim” se o mês fosse até dia 30 ou 31, e não se o mês fosse Fevereiro (que pode entre 28 e 29 dias).

Dessa forma, quando o Sr. Johnson responde que sim, ele está interpretando a pergunta como um “ou-inclusivo” no qual ele somente estará errado caso o leite não seja nem bebida, nem um caldo e nem um molho.

*** Sim, matemáticos são chatos… isso me lembra aquela piada de uma pessoa que joga uma moeda para um matemático adivinhar o resultado e pergunta: Cara ou Coroa? E o matemático responde: Sim! O resultado será Cara OU (inclusivo) Coroa.

10. Você é fraco Lema, te falta importância!

blogs.unicamp.br/zero/2391 (16/10/2020)

Na matemática ouvimos frequentemente que algo é um Corolário, outra coisa é um Lema, aquilo é um Proposição, ali tem um Teorema…

Temos também termos como Regras, Leis, Propriedades, mas esses parecem ter seus sentidos de generalidade para resultados mais claros, por exemplo: Regra da Soma de Derivadas… é um resultado relacionado à operação de soma com as derivadas; Lei dos Senos… é um resultado que determina para qualquer triângulo, a relação do seno de um ângulo ser sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo; Propriedade distributiva da multiplicação… é um resultado que garante a(b + c) = ab + cd.

Assim, vamos focar nos 4 termos com significados mais obscuros (Corolário, Lema, Proposição, Teorema), o que são esses nomes afinal?

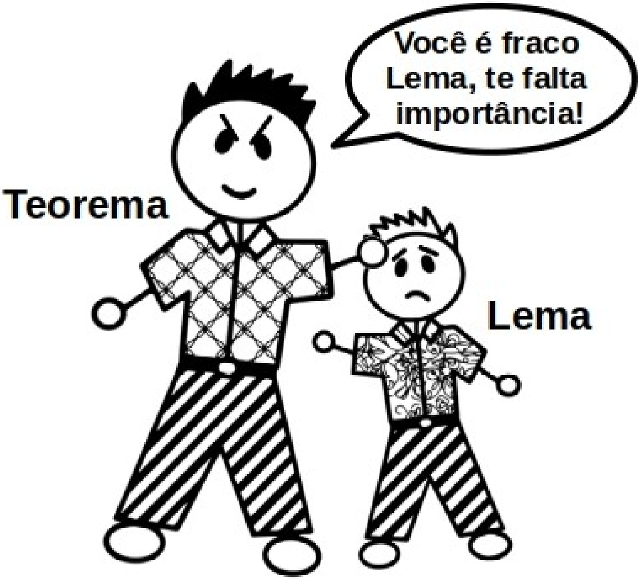
Vamos começar olhando no dicionário.

Corolário: proposição que deriva, em um encadeamento dedutivo, de uma asserção precedente, produzindo um acréscimo de conhecimento por meio da explicitação de aspectos que, no enunciado anterior, se mantinham latentes ou obscuros;

Lema: proposição preliminar cuja demonstração prévia é necessária para demonstrar a tese principal que se pretende estabelecer;

Proposição: enunciado traduzível em símbolos matemáticos, passível de múltiplos valores de verdade (verdadeiro, falso, indeterminado etc.) e redutível a dois elementos básicos (o sujeito e o predicado);

Teorema: proposição que pode ser demonstrada por meio de um processo lógico.



Você pode ter notado que eles se parecem.

E de fato há um motivo para isso, estes termos são todos Tautologias.

Vamos consultar no dicionário o que é uma Tautologia.

Tautologia: proposição analítica que permanece sempre verdadeira, uma vez que o atributo é uma repetição do sujeito.

De fato, Corolários, Lemas, Proposições e Teoremas, são todos Tautologias, ou seja, sentenças cuja veracidade foi provada de forma dedutiva.

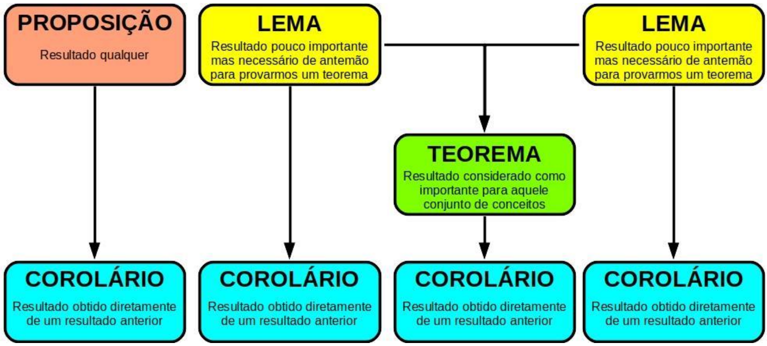
Suas diferenças giram mais em torno dos usos, no caso, os resultados mais importantes são chamados Teoremas.

Os resultados menos importantes, porém necessários de antemão para provarmos um Teorema, são chamados de Lemas.

Os resultados obtidos diretamente de um resultado anterior (seja um Lema ou um Teorema), são chamados de Corolários.

E as Proposições, são geralmente utilizadas para descrever resultados com pouca importância, que não são consequências diretas e nem são utilizados para demonstrar um teorema.

Fiz um rascunho dessas ideias para facilitar o entendimento.



Contudo, isso é mais convenção do que regra. Dizer que um resultado é um Teorema, Corolário, Proposição, Lema, Regra, Propriedade, Lei… é dizer que este resultado foi demonstrado de forma dedutiva baseado em um sistema axiomático adotado.

Em termos de tautologias, são todas iguais. Mas em termos de prestígio social, os Teoremas são superiores!

E assim justifico a imagem no começo deste texto, que faz referência a um meme sobre o anime Naruto, no qual Itachi, irmão de Sasuke, o derrota e repreende, dizendo que ele é fraco pois lhe falta ódio!

Nesse caso, um Teorema está repreendendo um Lema, dizendo que ele é fraco, pois lhe falta importância…

11. 6 GRAUS DE CO(VID)NEXÕES

blogs.unicamp.br/m3/307 (28/10/2020)

Oi, sabia que provavelmente nós quase nos conhecemos?

Sim, estou falando com você que está lendo.

É pouco provável que nos conheçamos pessoalmente (nesse caso teríamos grau de conexão 1);

Porém é um pouco mais provável que alguma das pessoas que eu conheço você também conheça (nesse caso teríamos grau de conexão 2);

Contudo, é bem mais provável que das pessoas que eu conheço, alguma delas conheça alguma das pessoas que você conhece (nesse caso teríamos grau de conexão 3).

Podemos seguir nessa lógica até afirmarmos com quase 100% de certeza de que estamos a no máximo 6 graus de conexão.

Surpreendente não acha?

Mas isso também significa muito em questão de proliferar uma doença.

Pois se eu estiver infectado, há no máximo 6 pessoas que me separam de você.

Por exemplo:

1. Posso apertar a mão de João no ônibus;

2. João compartilha o computador com Pedro no trabalho;

3. Pedro dá um abraço em Luiza na faculdade;

4. Luiza vende trufas para sua vizinha Mariana;

5. Mariana janta com sua mãe Cristina;

6. Cristina visita você.

Esse é apenas um exemplo bem específico, mas se considerarmos todas as pessoas que conhecemos, todas as pessoas que cada pessoa conhecida nossa conhece, e assim vai.

Percebemos que estamos separados de todas as outras a no máximo 6 graus.

Se ficou interessado neste tema, no repositório do M³ temos um material muito legal em áudio explicando/justificando/contextualizando essa temática e também um guia do professor, para que você não se surpreenda como uma pessoa do outro lado do mundo pode estar próxima o suficiente de você a ponto de infectá-lo.

Estes e muitos outros materiais podem ser encontrados no repositório do M³, mas para facilitar sua busca, abaixo está o link para estes materiais em específico.

https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1329

12. Os irmãos esquecidos de π

blogs.unicamp.br/zero/2409 (15/11/2020)

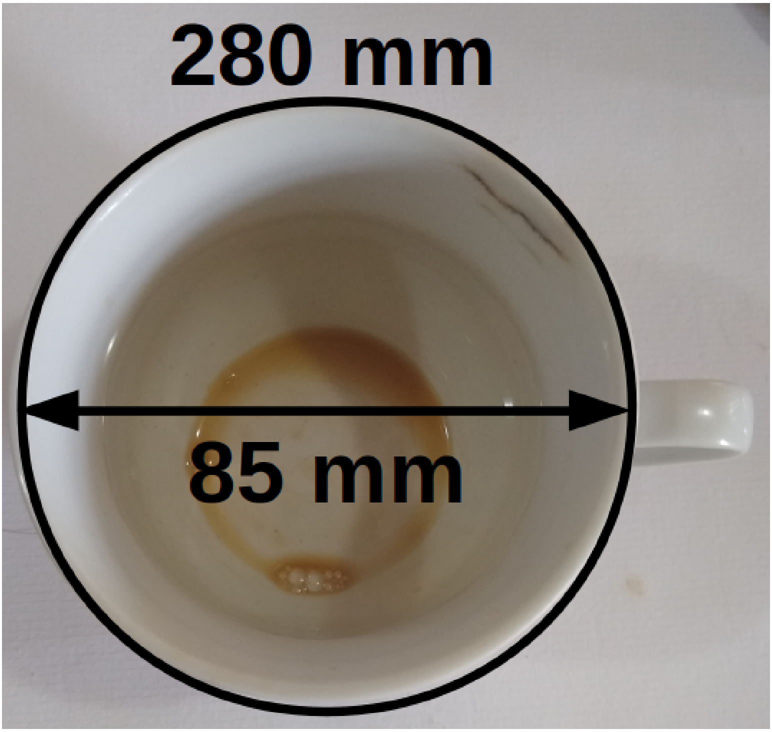
Na escola aprendemos que π é um número especial, uma constante obtida pelo perímetro de uma circunferência dividida por duas vezes o seu raio.

Uma maneira didática com que professores de matemática costumam apresentar esse conceito, é pedindo que os alunos encontrem circunferências pela escola, meçam seu perímetro, seu raio e depois realizem essa divisão.

Ainda que percebamos pequenas variações resultantes nas próprias medições, o valor se aproxima do famoso número irracional π (ou seja, algo em torno de 3,14).

Um exemplo disso, é minha xícara de café aqui ao meu lado enquanto escrevo.

Com uma fita métrica medi o seu perímetro e seu diâmetro.



Dividindo 280 por 85, chegamos em 3,294. Sim, foi uma péssima medição da minha parte mas serve de exemplo.

O interessante, é que a existência de uma constante dada pela divisão do perímetro pelo dobro do seu raio, se mantêm para todos os polígonos regulares!

Podemos nesse caso definir o raio de duas maneiras:

raio-vértice: dado pela distância de um dos vértices até o centro do polígono;

raio-apótema: dado pela menor distância de uma aresta até o centro do polígono.

Esse problema de escolha não ocorre no círculo, pois todo ponto do seu contorno tem a mesma distância até o centro.

Mas no caso dos polígonos regulares precisamos primeiro definir qual das categorias de raio estamos nos referindo.

Por um gosto pessoal, dado que já existe o conceito de apótema, prefiro adotar o raio-vértice.

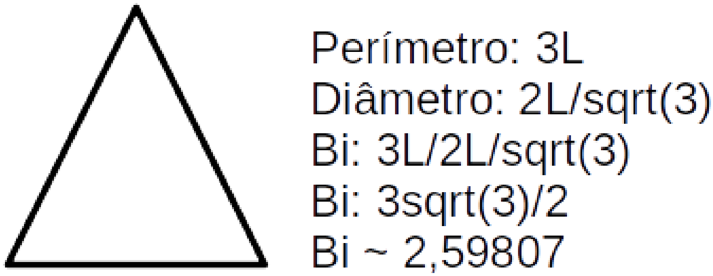
Também por conveniência, chamaremos de diâmetro o dobro da medida de um raio-vértice.

Assim, pegando um triângulo regular cujo lado vale L, seu perímetro será dado por 3L (até aqui está fácil);

Seu raio-vértice será dado por L/2 dividido por cos(30º), ou reescrevendo, L/[2.cos(30º)]. O valor do cos(30º) é sqrt(3)/2, logo, o raio-vértice será L/sqrt(3), e seu diâmetro será 2L/sqrt(3).

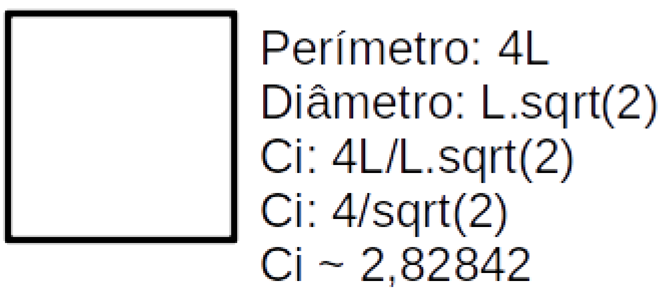
Dividindo o perímetro pelo diâmetro, chegaremos numa constante que chamaremos de Bi, e ela será dada por 3L/(2L/sqrt(3).

Como pode observar, temos a variável L no numerador e no denominador, e L é um comprimento, então L>0, assim o numerador e o denominador se anula, restando apenas uma constante, que é aproximadamente 2,59807.

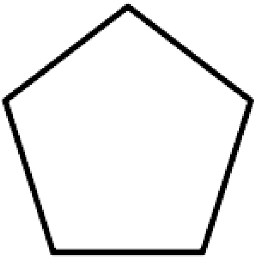


O mesmo raciocínio ocorre para um quadrado. Seu perímetro é dado por 4L, e seu diâmetro é dado por L.sqrt(2).

Dividindo o perímetro pela diagonal novamente o numerador L se anula com o denominador L, restando apenas 4/sqrt(2), ou seja, uma constante que chamaremos de Ci e se aproxima de 2,82842.



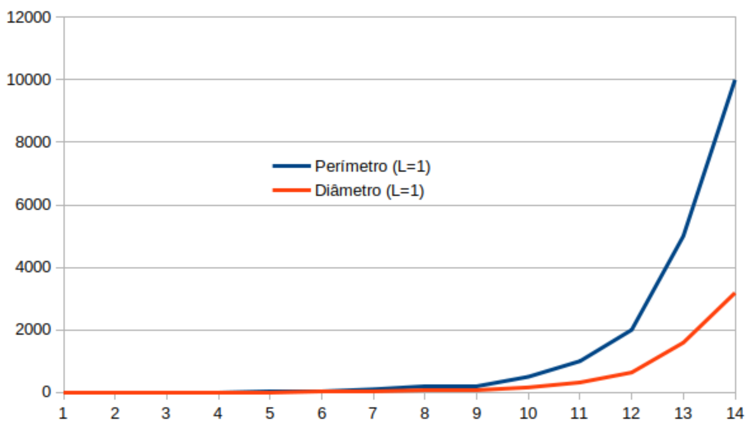
Para ilustrar, também mostro o cálculo com um pentágono.



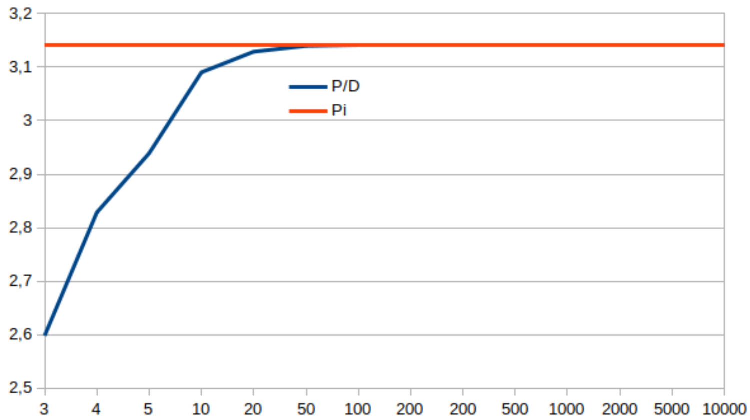
Perímetro: 5L
Diâmetro: L/cos(theta/2)
Diâmetro: L/cos(theta/2)
Di: 5L.cos(theta/2)/L
Di: 5.cos(54º)
Di ~ 2,939

Um resultado mais geral pode ser notado para todos os polígonos regulares, pois o numerador será um produto de L unidades, enquanto o diâmetro estará em função de L, se anulando e restando apenas uma constante.

Interessante observar como numerador cresce de forma linear, enquanto o denominador cresce mais lentamente.



Isso faz com que a medida que o número de lados do polígono aumenta, vamos gerando constantes Di, Fi, Gi, … até chegarmos no nosso famoso (e por isso sem graça) π.



Uma expressão geral para o cálculo do diâmetro de qualquer polígono regular é L.cos(theta/2), onde L é o lado do polígono e theta é um ângulo interior do polígono.

Perímetro (L=1)	Diâmetro (L=1)	P/D
3	1,15470053837925	2,59807621135332
4	1,4142135623731	2,82842712474619
5	1,70130161670408	2,93892626146237
10	3,23606797749979	3,09016994374947
20	6,39245322149966	3,12868930080462
50	15,9259711099087	3,13952597646566
100	31,8362252090975	3,14107590781284

200	63,6645953060007	3,14146346236413
200	63,6645953060007	3,14146346236413
500	159,155990294267	3,14157198277953
1000	318,310409783138	3,14158748587987
2000	636,620034167059	3,14159136166168
5000	1591,54953563821	3,14159244688228
10000	3183,09891419646	3,14159260191397

13. Como pagar ‘barato’ nos self-service por quilo

blogs.unicamp.br/zero/2433 (06/12/2020)

Sempre detestei restaurantes por quilo.

Acreditava que a opção ‘a vontade’ era melhor, afinal, você pode comer o tanto quanto quiser até se sentir satisfeito, enquanto na opção por quilo, mal coloco duas conchas de arroz, uma salada e um bife, que meu prato já ta custando uma fortuna.

Acho que muita gente também pensa assim, contudo a quase um mês tive uma revelação dentro de um self-service por quilo.

E percebi que realmente há uma fórmula matemática para pagar mais ‘barato’ do que as coisas realmente custam nesses lugares.

Vamos pensar nisso com um olhar matemático, no lugar onde estava com meu amigo aos domingos o preço do kg era 54,90$, assim vamos chamar os itens que eu utilizei para formar meu prato de a1, a2, a3, …, an, onde n é um número Natural, e o peso de cada item em kg e representado por x1, x2, x3, …, xn.

Assim, o valor do meu prato sairá:

(a1.x1 + a2.x2 + a3.x3 + a4.x4 + a5.x5)*54,90$ = 27,45$

Meu amigo fez o seguinte prato:

(a1.x7 + a5.x8 + a6.x9 + a7.x10 + a8.x11)*54,90$ = 27,45$

No caso, alguns itens se repetem, mas as quantidades variam.

Aparentemente nossos pratos têm o mesmo valor, mas a questão é, quem está pagando mais barato pelas comidas escolhidas?

Se supormos qual seria o valor por quilo de cada item disposto nos pratos, chegamos que:

a1/kg = 60$	a1/kg = 60$
a2/kg = 40$	a5/kg = 70$
a3/kg = 35$	a6/kg = 15$
a4/kg = 80$	a7/kg = 8$
a5/kg = 70$	a8/kg = 12$

Sabemos que a soma de todos os itens deu o mesmo peso, ou seja, meio quilo, agora substituindo esses valores nas equações, teremos que o custo real do nosso prato (caso fosse comprado item por item) seriam:

Meu prato: 60.x1 + 40.x2 + 35.x3 + 80.x4 + 70.x5

Prato do meu amigo: 60.x7 + 70.x8 + 15.x9 + 8.x10 + 12.x11

Observe que $x1+x2+x3+x4+x5+x6 = 0,5 = x7+x8+x9+x10+x11+x12$, todos números reais maiores do que 0.

Com isso, meu prato sairá mais ‘barato’ do que o restaurante cobra por kg se:

$60.x1 + 40.x2 + 35.x3 + 80.x4 + 70.x5 > 27,45$

Com isso, o prato do meu amigo sairá ‘mais barato’ do que o restaurante cobra por kg se:

$60.x7 + 70.x8 + 15.x9 + 8.x10 + 12.x11 > 27,45$

Nessa lógica, veja que se todos os itens escolhidos tivessem seus valores por quilo maiores que o preço do restaurante (54,90$), então para qualquer quantidade escolhida, estaríamos sempre pagando mais ‘barato’, por exemplo, um prato formado por a1, a4 e a5, com quantidades x12, x13, x14.

Prato hipotético sempre barato: $a1.x12 + a4.x13 + a5.x14 > 27,45$ para qualquer x12, x13 e $x14 > 0$.

Por outro lado, um prato formado apenas por itens cujos valores por quilo são menores que o preço do restaurante (54,90$), então para qualquer quantidade escolhida, estaríamos sempre pagando mais ‘caro’, por exemplo, um prato formado por a2, a3, a6, a7 e a8, com quantidades x15, x16, x17, x18 e x19.

Prato hipotético sempre caro: $a2.x15 + a3.x16 + a6.x17 + a7.x18 + a8.x19 < 27,45$ para qualquer x15, x16, x17, x18 e $x19 > 0$.

Em contextos intermediários, nos quais alguns itens por quilo custam mais de 54,90$ e outros menos (como na situação comigo e meu amigo), a quantidade de cada item influenciará se o valor total do prato sairá ‘barato’ ou ‘caro’.

Por exemplo, se ambos pegarmos 100 gramas de cada item, teremos:

Custo real do meu prato: 6 + 4 + 3,5 + 8 + 7 = 28,5$

Custo real do prato do meu amigo: 6 + 7 + 1,5 + 0,8 + 1,2 = 16,5$

Nesse contexto, meu prato já está saindo mais barato do que vale, enquanto o do meu amigo está saindo mais caro.

Para corrigir isso, ele precisaria investir mais em a1 e a5, e menos em a6, a7 e a8.

Em uma nova formulação, supondo que ele pegue 110 gramas de a1, 300 gramas de a5, e 30 gramas de a6, a7 e a8, seu prato sairia:

6,60 + 21 + 0,45 + 0,24 + 0,36 = 28,65$

A situação melhorou, embora os outros itens ainda estejam pesando contra, o fato de investir nos itens a1 e a5 permitiram seu prato ficar mais ‘barato’ do que os produtos custam.

De forma mais simples para entender esse raciocínio, se hipoteticamente duas pessoas fazem pratos 100 gramas cada.

Uma com apenas batata-doce e a outra apenas com salmão.

Ambos estarão pagando 5,49$ pelos seus produtos, a diferença é que 100 gramas de batata-doce por esse valor está ‘caro’, enquanto 100 gramas de salmão por esse valor está ‘barato’.

Será que suas escolhas de pratos nesses restaurantes seriam as mesmas se houvessem em cima de cada estufa o quanto este produto sairia por quilo?

Quem sabe um ‘coração de alcachofra’ cujo quilo é 270$ não começa a parecer mais saboroso que uma porção de batatas fritas cujo quilo é 15$?

14. M^3 É MAIS DE 8.000 (SE M > 20)

blogs.unicamp.br/m3/347 (08/12/2020)

Esse é um post para falar do nosso querido repositório que dá nome a esse blog, o M^3, o título é simplesmente um clickbait que brinca com o nome do site da coleção Matemática Multimídia: https://m3.ime.unicamp.br/.

M^3 é o site da coleção Matemática Multimídia, um conjunto com mais de 300 recursos educacionais multimídia de Matemática para o Ensino Médio, que recentemente passou por uma atualização completa (e necessária).

Esse repositório surgiu no começo de 2010, nessa época o acesso de sites por smartphones era reduzido em comparação com hoje assim como a popularidade dos podcasts.

Assim, o site precisou passar por ajustes para melhorar sua navegação, tanto pelo smartphone ou pelo desktop, como também o ajuste dos áudios para o formato de podcast e sua disponibilidade nas principais plataformas de streaming.

Se você acha que o repositório se reduz a esse blog, deixe-me explicar que na realidade é o contrário.

Esse blog surgiu a fim de divulgar os materiais desenvolvidos no M³ e repensar suas formas de uso, combinar recursos, compartilhar práticas, narrar experiências ou trazer discussões para atualidade.

Por isso esse blog não é só um trabalho de divulgação do M³, e sim uma exploração baseada nesse imenso repositório que nos permite tomar excelentes materiais e a partir deles remanejar discussões que nos rendem imensas experiências e satisfação!

Se você já usou algum recurso deste repositório e gostaria de contar-nos sobre como foi essa experiência, por favor, entre em contato, temos sempre espaço para autores convidados.

Também se é a primeira vez que você ouve falar da coleção Matemática Multimídia, aproveite e dê uma boa olhada nos recursos disponíveis, se tiver alguma ideia diferente das propostas sobre como usá-los, por favor, entre em contato que juntos organizamos essas ideias a fim de compartilhá-la na forma de um post seu como autor convidado.

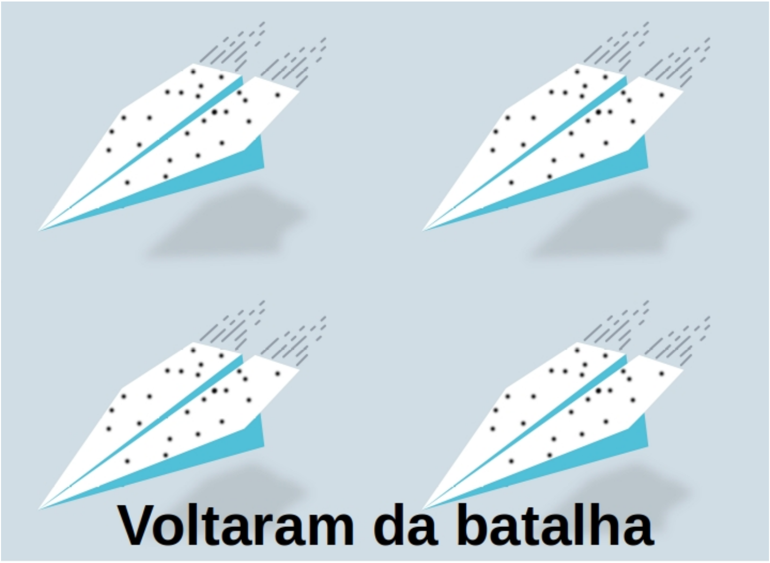
Você pode acompanhar as atualizações desta coleção também pelo nosso Twitter, @matematicam3

15. Curas milagrosas e aviões

blogs.unicamp.br/zero/2450 (15/12/2020)

Há uma história da matemática bem curiosa e contraintuitiva.

Ela envolve uma equipe de estatísticos, que durante a Segunda Guerra Mundial eram responsáveis por analisar os aviões que voltavam das batalhas, para decidir onde valeria a pena aumentar a blindagem do avião (dado que isso envolve colocar mais peso para voar, que exige mais combustível, o que deveria ser evitado a menos das regiões tidas como essenciais de se proteger).



Aviões que analisamos (Imagem adaptada de talha khalil por Pixabay)

Facilmente analisando os aviões que retornavam das batalhas, podiam identificar os locais mais atingidos por balas.

A princípio podemos pensar em aumentar o revestimento dessas regiões, afinal, de todos os aviões que retornaram, essas foram as regiões mais atingidas.

Sugestão de blindagem reforçada (Imagem adaptada de talha khalil por Pixabay)

Porém, o mais coerente a se pensar seria aumentar o revestimento das regiões que não tem marcas de balas no conjunto de aviões que retornaram da batalha.

Mas por que?

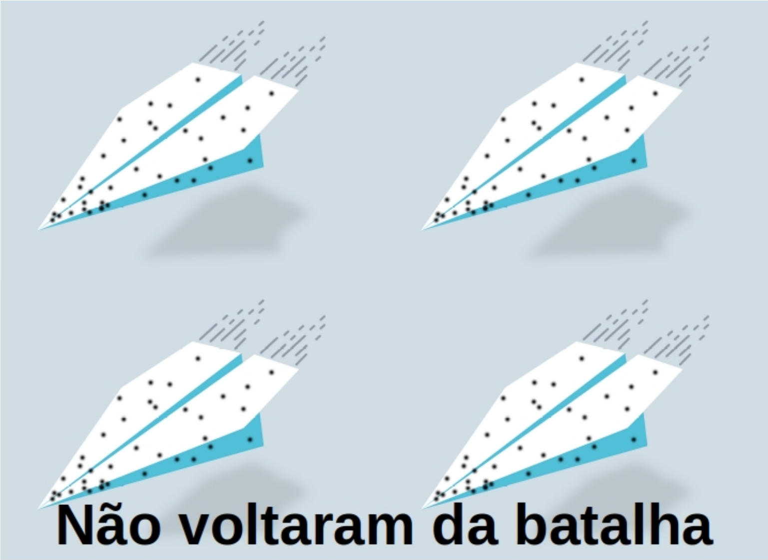
Se não temos nenhuma marca de bala nessas regiões, elas então não seriam as menos prováveis de serem atingidas?

Melhor sugestão de blindagem reforçada (Imagem adaptada de talha khalil por Pixabay)

O contraponto que justifica este argumento está no nosso conjunto de amostras, dado que todos os aviões que analisamos tem como característica comum “conseguirem voltar da batalha”.

E os aviões que não analisamos são aqueles que “sucumbiram na batalha”.

Logo, se pensarmos assim, dos aviões que analisamos, nenhum deles tinha marcas de bala atingindo diretamente o piloto, ou o motor, pois se isso ocorresse, o avião simplesmente não conseguiria retornar.



Aviões que nunca retornaram (Imagem adaptada de talha khalil por Pixabay)

Assim como o cenário dos aviões da Segunda Guerra Mundial, em diversas situações temos no nosso conjunto de informações a analisar, apenas aqueles que “conseguiram retornar da batalha”, enquanto que o mais coerente seria pensar no que aconteceu com aqueles que “não conseguiram retornar da batalha”?

Sugestão de blindagem reforçada com base na hipótese de regiões críticas (Imagem adaptada de talha khalil por Pixabay)

De maneira ingênua acabamos assumindo que isso representa um padrão, como a história de um rapaz que começou a vender panelas de porta em porta, e 20 anos depois controla a principal empresa do ramo de utensílios de cozinha.

Essas histórias são como os aviões que retornaram da batalha, analisamos o que aconteceu com essas pessoas, vemos as “regiões em que elas foram atingidas” como por exemplo “pobreza”, “falta de estudo”, “família pouco estruturada”.

Porém nesse contexto, esquecemos de nos preocupar com as regiões que essas pessoas “não foram atingidas”, como por exemplo “saúde debilitada”, “redução do poder de consumo da população”, “concorrentes de negócio”, dados estes que podem representar justamente a razão de outros “aviões” não conseguirem retornar destas batalhas.

De forma semelhante, vejo com certa frequência histórias de pessoas que encontravam-se doentes, enfrentando uma grande adversidade em questões de saúde, e que relatam terem sido curadas a partir da sua fé em uma entidade sobrenatural.

Não duvido que isso tenha de fato ocorrido, porém levanto o questionamento, será que ao focarmos nesses relatos não acabamos nos concentrando apenas nas “marcas nos aviões que retornaram da batalha”, nos esquecendo das regiões nas quais eles “não foram atingidos” e que podem ter influenciado diretamente o seu retorno?

Como por exemplo:

se houve a extinção de um hábito não declarado aos médicos (como fumar, beber ou usar drogas) que afetava os exames ou o tratamento;

se o tratamento após meses/anos finalmente surtia efeito;

se algum diagnóstico inicial estava errado, levando o paciente a um tratamento para outra doença, o qual agrava mais sua saúde;

se havia algum fator psicológico que interfere nos sintomas e foi sanado com a convicção de cura pela fé;

se algum fator genético incomum nesse paciente possibilitou que seu organismo conseguisse se curar;

se parte da sua rotina, alimentação ou trabalho era responsável por alguns dos sintomas.

Essas possibilidades levantadas, são equivalentes às regiões não atingidas nos aviões que retornaram da batalha.

Elas representam assim aspectos que permitiram ao piloto conduzir seu avião até o retorno seguro à base.

Ou no caso dos pacientes, aqueles que conseguiram se curar a partir da fé.

Mas se considerarmos apenas esse lado da história, estamos ignorando as hipóteses que levaram os aviões a “não retornarem da batalha”, ou sendo mais direto nesse contexto, as “histórias das pessoas que não se curaram a partir da fé”.

16. Se funciona, qual o problema usar?

blogs.unicamp.br/zero/2478 (16/12/2020)

Na graduação em Matemática vemos muitas demonstrações de propriedades (sejam elas chamadas de vários nomes como já discutido no texto 'Você é fraco Lema, te falta importância!').

Parte da justificativa por trás dessa exigência se vê na necessidade do matemático compreender um resultado como por exemplo que o número 73 é o único com as características que o fazem um 'Primo de Sheldon'.

Outro ponto a favor do estudo das demonstrações, é o próprio domínio do matemático sobre aquilo que fundamenta determinados resultados, ou mesmo, a forma como isso lhe permite rascunhar argumentos que validem ou refutem novas proposições.

Novas 'descobertas' na Matemática são divulgadas a partir de artigos científicos da área, e uma vez que a demonstração se torna pública, podemos usá-la a nosso bel prazer sem preocupações.

Enquanto ter ciência da veracidade de uma propriedade matemática é um processo árduo, vemos muitas 'dicas' ou até mesmo 'segredos que seu professor de matemática não quer que você saiba', envolvendo jeitos mais simples de realizar alguns cálculos.

Eles envolvem regras, técnicas e procedimentos ‘aparentemente’ mais claros do que o conceito original por trás, como por exemplo a ideia de ‘passar para o outro lado com o sinal oposto’, ou ‘passa pro outro lado cruzando’.

De fato, são regras que agilizam o processo de fazer contas, porém quando saltam a etapa de entender o conceito que lhe permite agir dessa maneira, considero tais técnicas evitáveis e até mesmo perigosas de serem usadas de forma leviana.

Mas então surge o questionamento: se a regra funciona, por que não usar?

Uma dessas ‘dicas’ de como simplificar frações de um jeito mais fácil.

Imagem adaptada de: reddit.com/r/MemeTemplatesOfficial/comments/cl7ydo/the_silent_protector_meme_soldier_failing_to/.

Nesse meme vemos o soldado representando os “Artigos científicos que demonstram propriedades da matemática” e do outro lado uma criança dormindo, prestes a ser atingida por vários projéteis e armas que lhe gerarão imenso dano (a “regrinha” de simplificar frações com números Naturais de dois dígitos no numerador e no denominador).

Parece uma “piada”, mas de fato essa é uma regra que funciona para esses 3 casos:

19/95 – você corta os 9’s e fica com 1/5;

26/65 – você corta os 6’s e fica com 2/5;

49/98 – você corta os 9’s e fica com 4/8.

Podemos explorar melhor essa regra escrevendo sua expressão geral da seguinte forma.

Temos 3 algarismos, X será a dezena do numerador, Y será a unidade do numerador (que será igual a dezena do denominador) e Z será a unidade do denominador. Assim, essa regra diz que:

$(10*X + Y)/(10*Y + Z) = X/Z$, para X, Y, Z Naturais variando entre 1 e 9.

Temos de forma direta 9 soluções para esse problema, bastando tomar $X = Y = Z$, que chegaremos em soluções do tipo:

11/11, 22/22, 33/33, 44/44, 55/55, 66/66, 77/77, 88/88 e 99/99.

Fixando Y = 6, obtemos (10*X + 6)/(60 + Z) = X/Z, do qual teremos solução quando X = 1, Z = 4, ou quando X = 2, Z = 5.

Fixando Y = 9, obtemos (10*X + 9)/(90 + Z) = X/Z, do qual teremos solução quando X = 1, Z = 5, ou quando X = 4, Z = 8.

Assim, entre 11 e 99, o conjunto de soluções dos casos em que essa regra funciona são:

11/11 = 1/1

22/22 = 2/2

33/33 = 3/3

44/44 = 4/4

55/55 = 5/5

66/66 = 6/6

77/77 = 7/7

88/88 =8/8

99/99 =9/9

16/64 =1/4

26/65 = 2/5

19/95 = 1/5

49/98 = 4/8

Brincando um pouco com permutações, temos 81 opções para o numerador variar entre 11 e 99 (pois ignoramos os números com 0), e temos 81 opções para o denominador variar entre 11 e 99 (pelo mesmo motivo).

Com isso, chegamos que existem 81^2 (6.561) números dessa forma, e destes, apenas os 13 casos acima funcionam.

Ou seja, se sortearmos um número dessa forma (dois dígitos em cima e dois dígitos em baixo) e eu utilizar essa regra, tenho quase 0,2% de chance dessa regra funcionar para essa situação, e outros 99,8% de chance dela não valer.

Pois desses 6.561 casos, em 6.548 deles essa regra não vale.

Esse foi um exemplo um tanto exagerado, mas que serve para mostrar como apesar de uma regra de aparente simplicidade, traz uma série de exceções mais caras do que o uso dos procedimentos padrões de divisão por frações.

Por exemplo, quando falamos que em equações podemos ‘passar um número para o outro lado mudando o sinal’, podemos cair no seguinte equívoco:

$$2 + 1 = 3 = 1 + 1 + 1$$

$$2 + 1 = 3 = 1 + 1 + 1$$

$$1 = -2 + 3 - 1 = 1 + 1$$

$$1 = 0 = 2$$

Mas diante essa situação, podemos pensar em adicionar uma ‘regra’ sobre a equação ter apenas um sinal de igual … mas o problema das regras é exatamente isso, a medida que buscamos corrigi-las, acabamos tornando-as mais complexas do que seria sua intenção inicial de simplificar o domínio do conceito.

Na verdade, em equações, não passamos nada de um lado para o outro, o que ocorre é somar, subtrair, multiplicar ou dividir (por um número diferente de 0) o mesmo valor em todas as igualdades, dado que isso não afeta a igualdade.

Embora possa nos levar a uma situação de inutilidade, como no exemplo abaixo.

$$2x + 1 = 3$$

$$0*(2x + 1) = 0*(3)$$

$$0 = 0$$

Não há absolutamente nada de errado em multiplicar por 0 todas as partes da igualdade, embora isso não te aproxime em nada de descobrir qual deve ser o valor de x.

Nesse sentido, entender o conceito te garante que essa operação está correta, o que poderia ser contra intuitivo no uso de 'regras', pois se elas servem para facilitar as contas, deveria ter uma regra dizendo para 'não multiplicar por 0', porém isso é permitido, embora seja uma ação inútil na busca pelo valor da incógnita.

Em outras tantas situações a ideia de passar a técnica na frente do conceito pode levar a equívocos e exceções, como no caso do Cálculo Diferencial, quando o estudante aplica a regra de L'hospital sem antes verificar se as funções a serem derivadas eram realmente indeterminadas.

17. A curiosa, mas não sobrenatural, Lei de Benford

blogs.unicamp.br/zero/2497 (27/12/2020)

A primeira vez que ouvi falar dessa famosa lei realmente me veio uma surpresa.

Achei inacreditável o fato do primeiro dígito não ter uma distribuição de probabilidade uniforme.

Parece uma espécie de ‘lei que nos controla’, ou uma ‘lei que está acima da nossa humilde arbitrariedade’.

Porém, apesar de curiosa, essa lei não tem nada de sobrenatural, exceto sua própria simplicidade.

Para quem caiu de paraquedas nesse post, a Lei de Benford fala que a distribuição do primeiro dígito em registros de fontes e dados reais não é homogênea.

Ou seja, não há igual probabilidade de variar entre 0 e 9, nem entre 1 e 9 caso você tenha pensado que o 0 à esquerda não faz sentido.

Essa lei diz que há uma distribuição de aproximadamente:

30% para que o primeiro dígito seja 1;

17% para que o primeiro dígito seja 2;

12% para que o primeiro dígito seja 3;

10% para que o primeiro dígito seja 4;

8% para que o primeiro dígito seja 5;

7% para que o primeiro dígito seja 6;

6% para que o primeiro dígito seja 7;

5% para que o primeiro dígito seja 8;

4% para que o primeiro dígito seja 9.

Há vários usos para esse resultado, como por exemplo verificar se houve adulteração de dados em alguma instituição.

Pois é provável que eles se comportem dessa forma, desse modo se isso não ocorrer, é de se suspeitar que houve adulteração.

Mas de onde vem essa coisa sobrenatural?

Qual a razão desse padrão estranho chamado de Lei de Benford?

A explicação disso é simples, vejamos uma notícia que saiu hoje (dia 26/12/2020) no G1 sobre a Dengue (sim, ainda existem outras doenças no Brasil além da COVID).

Dengue: DF ultrapassa 47 mil casos em 2020

Temos nessa notícia o número 47 mil casos.

Mas antes dessa notícia era esperado que tivéssemos 30 mil casos.

Antes dessa, devemos ter a notícia 20 mil casos;

Antes dessa, devemos ter a notícia 10 mil casos;

Mas o Distrito Federal não é a única região com casos de Dengue.

Podíamos ter tido outras notícias (dependendo da data) como por exemplo:

DF ultrapassa 10 mil casos em 2020

SP ultrapassa 10 mil casos em 2020

MG ultrapassa 10 mil casos em 2020

RJ ultrapassa 10 mil casos em 2020

…

Contudo, nem todas as regiões são afetadas da mesma forma, assim poderíamos ter que dos 27 estados brasileiros, 25 deles passem de 20 mil casos de Dengue.

Mas desses 25 estados, talvez nem todos passem de 30 mil casos, podemos dizer por exemplo que 21 estados passaram de 30 mil casos.

E assim sucessivamente, chegando que apenas 3 estados passem de 50 mil casos de Dengue.

Isso significa que nas notícias relacionadas aos casos de Dengue, teríamos 27 delas falando sobre o respectivo estado ter passado de 10 mil casos de Dengue.

Porém, apenas 25 estados têm notícias falando de ter passado de 20 mil casos.

E assim diminuindo…

A mesma relação vale por exemplo para números de filhos.

A maioria das pessoas antes de ter seu segundo filho, tem o seu primeiro filho.

Ou seja, se formos olhar os registros de famílias com filhos, o número 1 aparecerá no primeiro dígito com muita frequência, dado que antes de termos o segundo, terceiro, quarto filho, geralmente temo o primeiro.

De forma análoga, quando surge uma doença, antes de termos o segundo caso de infectado, teremos a notícia sobre o primeiro caso.

E não só isso, cada cidade, cada região, cada país, terá seu primeiro caso.

Então teremos o primeiro caso em Campinas, o primeiro caso em Bauru, o primeiro caso em São Carlos… veja como o 1 aparece nos registros com muita frequência se comparável aos demais.

Por exemplo, tivemos o primeiro caso de uma doença extremamente rara.

Pode ser que nos próximos anos ninguém naquela mesma região apresente a mesma doença, fazendo com que fiquemos ainda no primeiro caso.

Por isso, o 1 se vê tão presente no primeiro dígito.

Pois pensando um pouco em probabilidade condicional, geralmente para termos o 2, precisamos que o 1 tenha ocorrido antes.

Fazendo desse mais frequente que o 2, e este mais frequente que o 3, e assim sucessivamente.

Sobre a Autora

EMANUELLY DE PAULA é Licenciada em Matemática pela USP, Especialista em Informática aplicada à Educação pelo IFRJ, Mestre e Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela UNESP e UNICAMP respectivamente. Atualmente é professora do IFRJ, campus Duque de Caxias e gerencia os Blogs Zero e M^3 desde suas fundações.

Outros Ebooks Publicados

M30: volume 1

M30: volume 2

M30: volume 3